

**Mémoire de stage de Master en Informatique**

Spécialité « Informatique et Sciences de l'Image »

---

# Simplification de maillages surfaciques avec champs de lumière

---

Travaux effectués sous la direction de  
M. Basile SAUVAGE - Maître de Conférences à l'Université de Strasbourg  
M. Jean-Michel DISCHLER - Professeur à l'Université de Strasbourg

et rapportés par  
M. Mohamed TAJINE - Professeur à l'Université de Strasbourg

**Kenneth VANHOEY**

Université de Strasbourg

Laboratoire des Sciences de  
l'Image, de l'Informatique et de la  
Télédétection



Janvier–Juin 2010



## Résumé

La restitution de modèles avec champs de lumière ajoute beaucoup de réalisme aux objets virtuels numérisés. Ils permettent de faire varier la couleur d'un objet en fonction du point de vue de l'utilisateur, ce qui permet de modéliser des reflets spéculaires notamment.

Cependant, les maillages représentant de tels modèles sont souvent très détaillés et difficiles à afficher en temps réel.

Aucune publication ne traite à ce jour de la simplification de maillages avec champs de lumière. Ainsi, nous analysons d'abord les méthodes de simplification de maillages plus simples pour ensuite les comparer et en établir un bilan.

Ensuite, nous proposons une première méthode de simplification basée sur des contractions successives d'arêtes. Pour cela, nous associons à chaque arête une mesure d'erreur locale permettant d'évaluer le biais qui sera introduit par sa contraction. Cette mesure est constituée d'une mesure d'erreur en géométrie et d'une mesure d'erreur sur les champs de lumière.

De plus, nous proposons plusieurs façons d'associer un nouveau champ de lumière au sommet résultant d'une contraction d'arêtes.

Finalement, nous comparons les différentes méthodes que nous avons mis en place sur deux modèles, afin de mettre en avant les qualités et les caractéristiques de chacune d'entre elles.

## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mes encadrants, M. Jean-Michel Dischler et M. Basile Sauvage, pour m'avoir accepté sur ce stage et pour leur disponibilité et leurs conseils durant ces six mois. Un merci particulier à Basile pour son suivi continu (mais jamais envahissant), son aide, son sens du détail et pour toutes les discussions qui m'ont beaucoup porté conseil.

Merci aussi à lui ainsi qu'à tous les membres de l'équipe IGG que j'ai pu côtoyer (co-stagiaires compris bien sûr) pour la bonne ambiance qui rend le cadre de travail agréable.

Merci à M. Mohamed Tajine d'avoir bien voulu rapporter ces travaux.

Je remercie également toutes les personnes qui ont pu me donner des coups de main sur ce stage, ne serait-ce qu'en prenant le temps de discuter d'un problème donné. Je pense là en particulier à mon ami et co-stagiaire Lionel, mais aussi à Sylvain, Rémi, Thomas, Pierre, Cyril, Lucas et Olivier. Merci également à Simon pour ses nombreux conseils.

Finalement, il me reste à remercier les personnes qui me soutiennent sans compter et qui font mon bonheur dans la vie, en particulier Camille, Maman, Papa et Gillou. C'est avant tout grâce à eux que j'ai développé l'envie et que j'ai eu le cadre me permettant d'avancer dans mes études jusqu'à ce stage.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
	Contexte scientifique . . . . .	1
	Problématique . . . . .	2
	Définitions et formalisme . . . . .	2
	Plan du rapport . . . . .	5
<b>2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>6</b>
2.1	Contexte et algorithme de simplification . . . . .	7
2.1.1	Contexte . . . . .	7
2.1.2	Algorithme de simplification . . . . .	7
2.2	Simplification de maillages avec plongement géométrique . . . . .	8
2.2.1	Métrique d'erreur quadratique (QEM) . . . . .	8
2.3	Simplification de maillages avec attributs vectoriels . . . . .	12
2.3.1	Simplification couleur avec critères locaux . . . . .	12
2.3.2	Simplification couleur par textures . . . . .	15
2.4	Conclusion . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Comparaison des méthodes de simplification existantes</b>	<b>18</b>
3.1	Géométrie . . . . .	19
3.1.1	Simplification naïve et QEM . . . . .	19
3.1.2	Contraction optimale et semi-contraction . . . . .	19
3.1.3	Quadriques cumulées et version « memoryless » . . . . .	20
3.2	Couleur . . . . .	21
3.2.1	Contraction optimale et semi-contraction . . . . .	21
3.2.2	Évaluation visuelle des métriques . . . . .	22
3.2.3	QEM cumulative et QEM « memoryless » . . . . .	23
3.3	Conclusions . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Simplification de maillages avec champs de lumière</b>	<b>27</b>
4.1	Métrie d'erreur . . . . .	28
4.1.1	Distance entre champs de lumière . . . . .	28
4.1.2	Erreur commise à la contraction . . . . .	31
4.1.3	Propriétés . . . . .	32
4.2	Plongement d'un sommet contracté . . . . .	34
4.2.1	Possibilités de plongement . . . . .	34
4.2.2	Définition des plongements . . . . .	36
4.3	Détails supplémentaires . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Implantation, tests et résultats</b>	<b>37</b>
5.1	Implantation . . . . .	38
5.2	Tests . . . . .	38
5.2.1	Données de test et caractéristiques . . . . .	38
5.2.2	Méthodes de simplifications à analyser . . . . .	40
5.3	Résultats . . . . .	41
5.3.1	Critères de qualité d'un maillage simplifié . . . . .	41
5.3.2	Comparaison qualitative des techniques de contraction . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
6.1	Contributions . . . . .	47
6.2	Évaluation des expérimentations et limites . . . . .	47
6.3	Perspectives . . . . .	48
	<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>
	<b>Annexes</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Changements de repères</b>	<b>53</b>
A.1	Comparaison de deux fonctions de champ de lumière . . . . .	54
A.1.1	Recalage des repères . . . . .	54
A.2	Domaine d'intégration après recalage . . . . .	58
A.3	Comparaison de champs de lumière lors d'une contraction . . . . .	59
A.4	Mise en œuvre . . . . .	60
A.4.1	Données . . . . .	60
A.4.2	Erreur à la contraction de champs de lumière . . . . .	60
<b>B</b>	<b>Images extraites des simplifications</b>	<b>63</b>

# Table des figures

1.1	Maillage avec champs de lumière . . . . .	3
2.1	Contraction d'arête . . . . .	7
2.2	Interprétation géométrique de la QEM . . . . .	11
2.3	Simplification « memoryless » . . . . .	16
3.1	QEM vs. simplification naïve . . . . .	19
3.2	QEM en semi-contraction vs. QEM optimale . . . . .	20
3.3	QEM cumulative vs. QEM « memoryless » . . . . .	21
3.4	Métrique [KCL08] améliorée . . . . .	23
3.5	Comparaison des simplifications couleur – statuette africaine . . . . .	25
3.6	Comparaison des simplifications couleur – vase grec . . . . .	25
3.7	Comparaison des simplifications couleur – maillage synthétique à seuil . . . . .	26
3.8	Comparaison des simplifications couleur – maillage synthétique avec dégradé . . . . .	26
4.1	Comparaison de deux champs de lumière . . . . .	29
4.2	Écart sur les points de vues perdus . . . . .	30
4.3	Continuité dans l'addition des erreurs . . . . .	31
5.1	Statuette africaine, maillage original . . . . .	39
5.2	Vase grec, maillage original . . . . .	40
5.3	Vase grec simplifié à 72 502 faces (réduction à 20%) avec la méthode hybride. . . . .	42
5.4	Simplification à 10% – statuette . . . . .	43
5.5	Simplification à 10% – vase . . . . .	45
6.1	Relief sur les modèles . . . . .	48
A.1	Coordonnées hémisphériques . . . . .	54

A.2	État après rotations $T_1$ . . . . .	55
A.3	Coordonnées sphériques . . . . .	57
A.4	La rotation autour de l'axe $i$ . . . . .	57
A.5	Définition du domaine d'intégration . . . . .	58
B.1	Statuette africaine, maillage original . . . . .	64
B.2	Simplification à 20% – statuette . . . . .	65
B.3	Simplification à 15% – statuette . . . . .	66
B.4	Simplification à 10% – statuette . . . . .	67
B.5	Vase grec, maillage original . . . . .	68
B.6	Simplification à 20% – vase . . . . .	69
B.7	Simplification à 15% – vase . . . . .	70
B.8	Simplification à 10% – vase . . . . .	71



## Introduction

### Contexte scientifique

Ce stage se situe dans le cadre d'un projet<sup>1</sup> englobant la création et la visualisation d'images de synthèse à des fins d'archivage du patrimoine culturel notamment. A cet effet, il faut pouvoir restituer un objet culturel ou un bâtiment historique avec le réalisme d'une observation directe. Dans le monde réel, la perception d'objets est liée à deux facteurs variables : la position de la lumière et de celle de l'observateur par rapport à l'objet. En effet, beaucoup d'effets tel que le reflet spéculaire d'une surface ou les ombres générées en dépendent.

Cependant, nous allons nous permettre de fixer la position de la lumière. Nous diminuons ainsi la complexité des données afin de pouvoir aborder un problème plus simple. Cette représentation simplifiée est toutefois très utilisée en soi. Elle permet en effet de restituer de nombreux effets, en particulier l'effet spéculaire. Il est donc possible de visualiser une scène à illumination fixe tel qu'un bâtiment à un moment donné de la journée (position du soleil fixe) ou un tableau éclairé dans un musée par exemple.

Dans le cadre de ce stage, nous allons uniquement nous intéresser à la visualisation des images de synthèse et non à leur acquisition. Ainsi, nous considérons avoir à disposition des modèles représentant un objet coloré dont l'aspect est fonction de la position relative de l'observateur.

Pour pouvoir représenter ce modèle, on y définit des champs de lumière aux sommets. On obtient alors un modèle polygonal surfacique avec attributs aux sommets et sur lequel est défini en chaque sommet, une position géométrique dans l'espace et une fonction qui renvoie la couleur correspondant au sommet considéré en fonction de la position relative de l'observateur. Nous caractériserons ces données formellement après avoir introduit la problématique à laquelle nous allons nous intéresser.

---

1. Projet ATROCO – Acquisition et TRaitement d'Objets COMplexes  
<http://artis.imag.fr/Projets/ATROCO/>

## Problématique

L'acquisition d'un maillage<sup>2</sup> avec champs de lumière se fait communément en deux grandes étapes.

1. Géométrie :
  - Acquisition de la géométrie de l'objet par scanner 3D ;
  - Reconstruction d'un maillage polygonal et calcul des normales à la surface aux sommets.
2. Champs de lumière :
  - Acquisition de couleurs en fonction de plusieurs points de vue par prise de photos ;
  - Définition des fonctions de champ de lumière sur chaque sommet à partir des données photo.

On souhaite généralement que la première étape génère un maillage très fin afin de pouvoir recréer des normales fidèles à la surface réelle ainsi que pour capturer les moindres détails de l'objet scanné. La définition par la suite d'un champ de lumière génère une fonction par sommet.

Lors de la visualisation, la couleur doit ainsi être recalculée par la fonction sur tous les sommets dès lors que la position de l'observateur change. Un maillage très fin, excédant généralement des centaines de milliers de polygones, est alors très difficile à restituer en temps réel.

De plus, une résolution haute est nécessaire lors de la création du maillage mais n'apporte visuellement que très peu. Il serait très intéressant de pouvoir simplifier le maillage grossièrement là où peu de spécificités visuelles existent, tout en préservant une résolution élevée aux endroits visuellement primordiaux.

C'est pourquoi nous nous intéressons au problème de la simplification d'un tel maillage. Notre but est ainsi de pouvoir simplifier un maillage avec champs de lumière vers une résolution largement inférieure tout en préservant le mieux que possible la qualité du rendu visuel. Dans le chapitre 5, nous caractériserons la notion de qualité d'un maillage simplifié par rapport aux propriétés que l'on souhaite évaluer.

Un autre but dans le cadre de la simplification de maillages serait de créer des maillages à différents niveaux de détails ou encore des maillages progressifs ([Hop96]). Ces notions sont utiles pour la visualisation sélective, à haut niveau de détails dans une zone particulière (lorsque l'utilisateur zoome dessus par exemple), ou pour la transmission progressive.

Néanmoins, même si ces utilisations sont parmi les plus demandées dans le monde des jeux vidéo par exemple, où la performance prime devant la qualité, nous mettons ce but de côté afin de se focaliser sur l'analyse d'une simplification brute. Nous souhaitons en effet pouvoir définir des méthodes de simplification et analyser leurs propriétés de façon assez fondamentale, d'où nous analyserons une simplification d'un maillage fin vers un maillage grossier.

## Définitions et formalisme

Nous allons considérer la problématique de la simplification de maillages polygonaux comprenant un plongement géométrique dans  $\mathbb{R}^3$  et un plongement de champs de lumière. Les maillages sont pour la suite supposés triangulaires. Dans cette section nous formalisons successivement les définitions d'un maillage surfacique, d'un plongement géométrique et finalement d'un plongement de champ de lumière.

---

2. pour plus d'information sur l'acquisition et la représentation d'objets, voir [LB04, WLL<sup>+</sup>09]

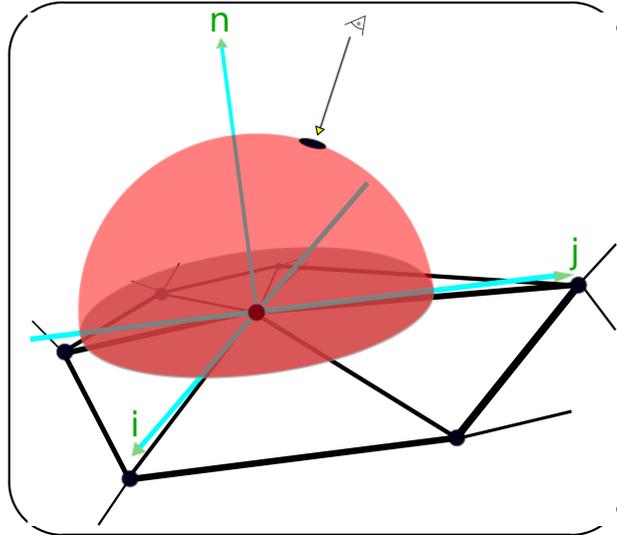


FIGURE 1.1 – Maillage triangulaire avec champs de lumière. Le champ de lumière associe une couleur à chaque angle de vue incident dans l’hémisphère visible. Celui-ci est défini tel que la normale à la surface passe par son pôle tandis que le plan tangent à la surface définit sa coupe équatoriale.

## Maillage surfacique

Nous considérons un maillage surfacique triangulaire  $M = (V, A, P)$  où :

- $V = \{v_k | 1 \leq k \leq n\}$  : l’ensemble des  $n$  sommets
- $A \subset V \times V$  : les couples de sommets soutenant une arête
- $P = \{F : V \rightarrow S : v_k \mapsto s_k, 1 \leq k \leq n\}$  : l’ensemble des plongements définis sur les sommets  $V$  et vers un espace de plongement  $S$

Les attributs sont donc définis sur les sommets par le biais des fonctions de plongement et sont interpolés sur la surface entre les sommets.

Les fonctions de plongement sont constituées de plusieurs sous-fonctions.

## Plongement géométrique

Le plongement de notre maillage se fait avant tout dans l’espace  $\mathbb{R}^3$ . Il permet de donner une forme tridimensionnelle au maillage surfacique en associant à chaque sommet des coordonnées en  $\mathbb{R}^3$ . Le plongement formalisé s’écrit comme suit.

$$P_G : V \rightarrow \mathbb{R}^3 : v_k \mapsto (x_k, y_k, z_k)$$

## Plongement de champ de lumière

A chaque sommet est également associé un champ de lumière  $L$ . Il renvoie une couleur pour tout angle de vue défini sur l’hémisphère visible de ce point. Cet hémisphère est défini tel que son axe polaire soit parallèle à la normale au point considéré (figure 1.1). Il représente l’ensemble des points de vue incidents à partir desquels le sommet est visible.

Dans la littérature, le champ de lumière est souvent défini dans sa globalité sur le maillage comme une fonction à 4 dimensions : à tout point du maillage (deux-dimensionnel) est associé une couleur en fonction du placement sur son hémisphère visible (deux degrés de liberté). De

notre point de vue, nous considérons un champ de lumière par sommet vu que notre traitement sera local. On peut donc dire que nous avons  $n$  fonctions à deux dimensions.

Formalisons ce plongement.

Avant tout, il faut pouvoir définir correctement l'hémisphère, qui représente le domaine de définition de la fonction, ce qui implique dans un premier temps de connaître la normale au plan en un point considéré. Introduisons ainsi la normale  $P_n(v_k)$  du sommet  $v_k$  tel que :

$$P_n : V \rightarrow \mathbb{R}^3 : v_k \mapsto \mathbf{n}_k = \overrightarrow{(x_{n_k}, y_{n_k}, z_{n_k})}$$

Étant donné ce vecteur normal, l'hémisphère peut être défini centré au sommet et basé sur le plan tangent (donc tel que son axe polaire soit parallèle à la normale). Cependant, afin de fixer l'hémisphère (l'orientation autour de l'axe polaire est toujours libre pour l'instant), nous nous donnons deux vecteurs  $\overrightarrow{P_i(v)}$  et  $\overrightarrow{P_j(v)}$  se situant dans le plan tangent à la surface au point donné, et tel que  $(\overrightarrow{P_i(v)}, \overrightarrow{P_j(v)}, \overrightarrow{P_n(v)})$  soit un repère orthonormé direct. Nous obtenons ainsi un repère de *Frenet* centré au point considéré (voir figure 1.1).

Définissons le repère de champ de lumière comme un plongement

$$P_F : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ v_k \mapsto (P_i(v_k), P_j(v_k), P_n(v_k))$$

Tous les vecteurs considérés sont normalisés (de norme unité)

Désormais, nous pouvons définir la fonction de champ de lumière associé à un sommet. Un point sur l'hémisphère est caractérisé par ses coordonnées en  $\mathbb{R}^3$  dans le repère local. Son domaine de définition est contraint tel qu'il représente l'hémisphère  $H$  défini par l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  et  $z \geq 0$  dans son repère. Ces contraintes reviennent à dire que  $x^2 + y^2 \leq 1$  et que  $z = +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ . Ainsi, en pratique, le domaine de définition peut s'écrire par deux coordonnées  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  tel que les coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$  soient définies par  $(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ . Les coordonnées  $(u, v)$  représentent ainsi la projection orthographique sur le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$  d'un point de l'hémisphère.

La fonction de champs de lumière définit pour tout point de vue de l'hémisphère (caractérisé par des coordonnées  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  dans le plan tangent au sommet), une couleur dans un espace de couleurs  $E$  donné.

$$P_{Lff} : V \rightarrow (\mathbb{R}^2 \rightarrow E)$$

En réalité, on a une fonction par canal de l'espace de couleur.

Tout canal  $c$  considéré est ainsi traité séparément par une fonction exprimée dans une base de fonctions scalaires :

$$P_{Lff}(c) : V \rightarrow (\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}) \\ v_k \mapsto ((u, v) \mapsto \sum_t a_t \phi_t(u, v))$$

où les  $\phi_t$  peuvent être sous différentes formes : ondelettes, harmoniques sphériques, polynômes, sinusoides, etc.

Dans notre cas, on travaillera avec des couleurs  $(R, G, B)$  et on aura ainsi 3 fonctions par sommet.

Remarquons que le domaine de la fonction est l'hémisphère *continu* et que l'élément de surface unitaire est donc déformé par la projection sur le plan tangent.

## Notations

Récapitulons nos différentes notations concernant les plongements :

- $P_G$  : le plongement géométrique dans  $\mathbb{R}^3$ .
- $P_F$  : le repère local du champ de lumière dans l'espace, orthonormé et direct, permettant d'orienter l'hémisphère visible. Nous l'évoquerons comme repère (de *Frenet*) du champ de lumière ou repère local plus simplement.
- $P_{Lff}(c)$  : la fonction de champ de lumière définissant une composante de couleur pour chaque angle de vue incident sur l'hémisphère visible.

Lorsque nous parlerons désormais du (plongement de) champ de lumière  $P_L$ , cela comprend le repère de champ de lumière  $P_F$  et la fonction de champ de lumière  $P_{Lff}$ .

L'ensemble des plongements est noté  $P = P_G \cup (P_F \cup P_{Lff}) = P_G \cup P_L$ .

Dans ce document, nous traitons les fonctions de champ de lumière de chaque canal de façon identique. Ainsi, par commodité, la notation de plongement  $P_{Lff}$  désignera directement la fonction écrite sur un canal donné :

$$\begin{aligned} P_{Lff} : V &\rightarrow (\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}) \\ v_k &\mapsto ((u, v) \mapsto \sum_t a_t \phi_t(u, v)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

## Plan du rapport

Au chapitre 2 nous exposons les méthodes de simplification de maillages existantes et utiles à la compréhension des chapitres suivants.

Au chapitre 3 nous analysons les méthodes dont nous avons extrait des résultats significatifs sur lesquels nous nous basons pour définir la simplification de maillages avec champs de lumière.

Ces méthodes et leur choix de conception sont exposés au chapitre 4.

Au chapitre 5 nous expliquons nos choix d'implémentation et de tests avant d'analyser les résultats obtenus.

Finalement nous concluons ce rapport au chapitre 6 avec une évaluation de nos travaux et les perspectives de travaux à venir.

L'annexe A complète ce document. Il comprend des détails concernant les nombreux calculs de mise en œuvre de nos métriques sur les champs de lumière.

Finalement, nous avons mis dans l'annexe B, un certain nombre d'images de modèles d'objets simplifiés durant nos tests.

## Contenu

- 2.1 Contexte et algorithme de simplification**
  - 2.1.1 Contexte
  - 2.1.2 Algorithme de simplification
- 2.2 Simplification de maillages avec plongement géométrique**
  - 2.2.1 Métrique d'erreur quadratique (QEM)
- 2.3 Simplification de maillages avec attributs vectoriels**
  - 2.3.1 Simplification couleur avec critères locaux
  - 2.3.2 Simplification couleur par textures
- 2.4 Conclusion**

## État de l'art

Durant les quinze dernières années, des travaux de qualité ont porté sur la simplification de maillages avec plongement géométrique dans un premier temps, avec attributs vectoriels (couleur, normales, coordonnées de textures) ensuite. Cependant, nous n'avons pas identifié de travaux intéressants concernant la simplification de maillages avec attributs complexes, en particulier fonctionnels tel que les champs de lumière.

Nous allons toutefois dresser un bilan des buts de simplification, des algorithmes connus et des techniques de simplification de maillages avec attributs vectoriels que nous avons pu rencontrer. Les articles que nous explorerons nous ont donnés, outre des aspects contextuels importants, les outils nécessaires à une appréhension correcte du problème de la simplification de modèles avec champs de lumière.

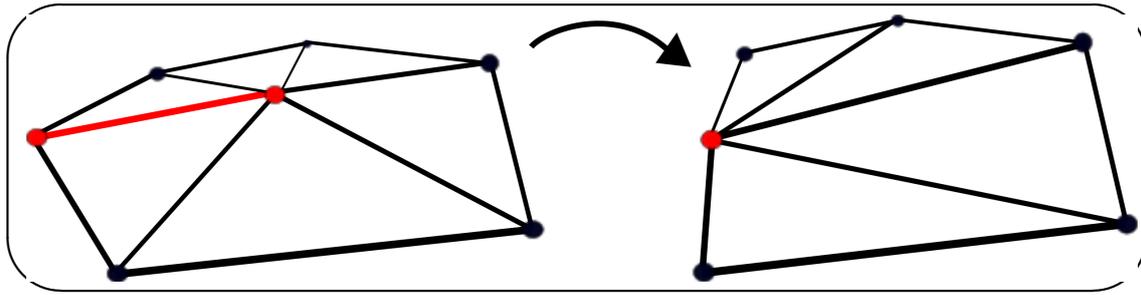


FIGURE 2.1 – Opération unitaire de contraction d’arête. Deux sommets sont fusionnés en un seul, l’arête les reliant est dite « contractée », les deux faces adjacentes disparaissent.

## 2.1 Contexte et algorithme de simplification

Nous considérons la problématique de la simplification de maillages surfacique plongés dans l’espace. Afin de garder un contrôle sur les attributs et sur la topologie, nous ne nous intéressons pour la simplification qu’aux opérateurs de contraction locaux.

### 2.1.1 Contexte

Dans son article [Hop96], *Hugues Hoppe* commence par identifier les problématiques liées aux maillages obtenus par scanner 3D. Il liste plus particulièrement les besoins suivants :

- *Simplification de maillages* afin de visualiser en temps réel les données.
- *Approximation à différents niveaux de détails* afin de n’afficher de la haute résolution que si cela est nécessaire.
- *Transmission progressive* afin de garantir une qualité visuelle progressive lors de la transmission de données en affichant d’abord un maillage grossier puis plus de détails lors de l’arrivée des données.
- *Compression de maillages* pour un niveau de détail donné, afin de limiter le coût de stockage des données.
- *Raffinage sélectif* afin d’adapter le niveau de détail en fonction des régions du maillage et de la qualité qui y est souhaitée.

Ses contributions permettent de répondre à une grande partie de ces besoins. La principale d’entre elles, la définition de maillages progressifs [Hop96, Hop97], n’est pas intéressante dans le cadre de ce mémoire car elle se soucie plus particulièrement de la problématique d’approximation à différent niveaux de détails et de la transmission progressive, alors que nous souhaitons nous concentrer sur la simplification brute.

### 2.1.2 Algorithme de simplification

Au début des années 1990, beaucoup d’études ont porté sur les algorithmes de simplification de maillages polygonaux. L’article [HG97] en fait un tour d’horizon. Tandis que beaucoup de méthodes se basent sur l’utilisation de plusieurs opérations de contraction, *Hoppe* [Hop96] propose de se limiter à la contraction d’arêtes uniquement. Il est effectivement possible de réduire un maillage initial à un maillage plus grossier en utilisant uniquement des contractions d’arêtes (opération illustrée dans la figure 2.1). De plus, dans la perspective d’applications telles que les maillages progressifs ou les maillages à différents niveaux de détails, la contraction d’arêtes assure une transition unitaire peu visible. Finalement, considérer la contraction d’arêtes comme seul élément unitaire de simplification facilite l’implémentation.

Ainsi, en se basant sur la contraction d’arêtes, l’algorithme suivant est proposé.

```

Trier arêtes
Tantque (file d'arêtes non vide) faire
  Contracter l'arête en tête
  Mettre à jour la priorité des voisins du sommet contracté
FinTantque

```

On peut associer deux besoins à cet algorithme :

1. Définir un calcul de priorité d'une arête
2. Définir le nouveau plongement du sommet contracté

Depuis sa publication, cet algorithme est communément utilisé dans les problématiques de simplification de maillages avec attributs aux sommets.

En marge de cet algorithme, il faut faire attention aux contraintes topologiques que l'on souhaite considérer, notamment en termes de préservation des bords et en qualité du maillage triangulé (régularité des triangles). Ainsi, certaines arêtes pourront être pénalisées voir interdites de contraction.

## 2.2 Simplification de maillages avec plongement géométrique

Dans cette section nous considérons la simplification de maillages surfaciques plongés dans l'espace et sans autre attribut.

*Hoppe* présente (également dans son article [Hop96]) une façon d'associer une priorité à une arête. Il propose de mesurer une *erreur* commise si sa contraction a lieu. L'erreur qu'il propose de mesurer comprend notamment une erreur géométrique sous forme de distance dans  $\mathbb{R}^3$ .

Cependant, sa métrique d'erreur a été rapidement dépassée par la métrique d'erreur quadratique [GH97]. C'est pourquoi nous ne la détaillons pas davantage.

### 2.2.1 Métrique d'erreur quadratique (QEM)

*Michael Garland* et *Paul Heckbert* [GH97] ont fait une contribution majeure en proposant une métrique efficace qui associe une mesure d'erreur commise à la contraction d'une arête afin d'en déterminer la priorité. De plus, cette métrique permet de définir aisément un plongement dit « optimal » (qui minimise la métrique d'erreur). Ils utilisent comme algorithme de simplification le même que [Hop96], qu'ils ont généralisé à la contraction d'une paire de sommets quelconques (pas forcément reliés par une arête). Ceci a certains avantages (cela permet de concaténer deux composantes connexes du maillage s'ils sont proches) mais sort du cadre de nos travaux car cela ne contribue pas à l'évaluation de métriques de simplification.

#### Mesure d'erreur

Cet article propose de mesurer l'erreur commise en termes de distance à la surface du maillage initial. Plus précisément, l'erreur commise pour un sommet contracté vaut la *somme des distances quadratiques aux plans définis par les triangles adjacents à ses ancêtres* (avant contraction).

Les auteurs proposent une expression efficace de cette erreur qui s'appuie sur les notions suivantes :

- *Distance à un plan*

Soit  $P : ax + by + cz + d = 0$ , où  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , un plan dans l'espace. Son équation

peut également s'écrire ainsi :

$$\mathbf{p} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [a \ b \ c \ d] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

La distance quadratique d'un sommet  $v$  quelconque au plan  $P$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} d(P, v) &= (\mathbf{p} \cdot P_G^T(v))^2 \\ &= ([a \ b \ c \ d] \cdot \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix})^2 \\ &= [x_v \ y_v \ z_v \ 1] K_P \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où  $K_P = [a \ b \ c \ d] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$  est appelée la *matrice d'erreur quadratique fondamentale* du plan  $P$ .

Il suffit de connaître cette matrice pour évaluer une distance quadratique au plan  $P$ .

– *Additivité*

La somme de la distance d'un point à deux plans s'écrit alors comme suit.

$$\begin{aligned} d(P_1, v) + d(P_2, v) &= [x_v \ y_v \ z_v \ 1] K_{P_1} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix} + [x_v \ y_v \ z_v \ 1] K_{P_2} \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [x_v \ y_v \ z_v \ 1] (K_{P_1} + K_{P_2}) \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2}$$

C'est la propriété d'*additivité des matrices d'erreur quadratique* qui se généralise à plusieurs additions.

**Mise en œuvre** Pour effectuer les calculs de distance aux plans entourant un sommet, on associe une matrice  $Q_v$  à tout sommet  $v$ . Cette matrice est définie par la somme des matrices d'erreur quadratique fondamentales des plans définis par les triangles adjacents à  $v$  :

$$Q_v = \sum_{P \in \Pi} K_P \tag{2.3}$$

où  $\Pi$  est l'ensemble de ces plans

En s'appuyant sur l'équation (2.1) et la propriété d'additivité, on définit l'erreur  $\Delta_v(w)$  (où  $w$  est un sommet quelconque) comme la somme des distances quadratiques entre le point

géométrique  $P_G(w)$  et ces plans :

$$\Delta_v(w) = [x_w \ y_w \ z_w \ 1] Q_v \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ainsi, si  $w$  est l'intersection des plans en question,  $\Delta_v(w)$  sera nulle. Dans le cas contraire,  $\Delta_v(w)$  grandira en fonction de ses distances une-à-une aux plans individuels.

**Contraction d'arêtes** De plus, lors d'une contraction d'arête  $((v_1, v_2) \rightarrow \bar{v})$ , une nouvelle matrice  $Q$  est associée à  $\bar{v}$  de la façon suivante :

$$Q_{\bar{v}} = Q_{v_1} + Q_{v_2}$$

Grâce à cela, le coût d'une contraction potentielle de l'arête  $(v_1, v_2)$  vers un sommet  $\bar{v}$  est donné par :

$$\Delta(\bar{v}) = P_G(\bar{v}) \cdot (Q_1 + Q_2) \cdot P_G^T(\bar{v}) \quad (2.5)$$

Cette métrique mesure donc la somme des distances géométriques individuelles aux plans entourant les ancêtres de  $\bar{v}$  dans le maillage original<sup>1</sup>.

### Plongement de sommet contracté

Finalement, il reste à définir quel plongement donner au nouveau sommet contracté  $\bar{v}$ . Pour cela, les auteurs proposent de trouver les coordonnées  $P_G(\bar{v})$  tel que  $\Delta(\bar{v})$  soit minimale.

Vu que la fonction d'erreur  $\Delta$  est quadratique sur les coordonnées de  $\bar{v}$ , trouver son minimum devient un problème linéaire. En effet, il suffit de trouver les coordonnées de  $\bar{v}$  pour lesquelles le gradient de l'erreur s'annule :

$$\nabla(\Delta(\bar{v})) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Delta(\bar{v})}{\partial x} = \frac{\partial \Delta(\bar{v})}{\partial y} = \frac{\partial \Delta(\bar{v})}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

ce qui équivaut<sup>2</sup> à résoudre :

$$\bar{v} = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.7)$$

où  $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix}$  est la matrice d'erreur quadratique du sommet  $\bar{v}$ .

La dernière ligne est creuse car  $P_G(\bar{v})$  est exprimé en coordonnées homogènes (sa composante  $w$  étant toujours à 1).

Ainsi, avec cette formule,  $P_G(\bar{v})$  est défini tel que  $\Delta(\bar{v})$  soit minimale.

Cependant, cette formule n'est applicable que si la matrice de l'équation (2.7) est inversible. Si elle ne l'est pas, une solution de repli consiste à positionner  $\bar{v}$  aux coordonnées  $P_G(v_1)$ ,  $P_G(v_2)$  ou  $\frac{P_G(v_1) + P_G(v_2)}{2}$ .

---

1. Remarque : un plan peut être comptabilisé plusieurs fois (jusqu'à 3) dans ce calcul.  
2. Vérifiable en prenant les dérivées partielles sur la formule  $\Delta(\bar{v}) = P_G(\bar{v}) \cdot Q \cdot P_G^T(\bar{v})$ .

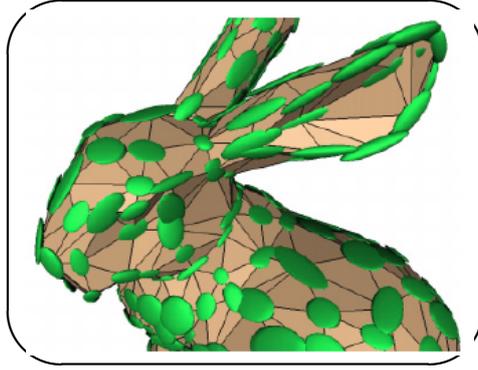


FIGURE 2.2 – Les ellipsoïdes ci-dessus représentent les surfaces de niveau de la métrique d’erreur quadratique pour une erreur  $\epsilon$  donnée.

### Détails additionnels

**Coût mémoire** Le coût mémoire généré par le stockage d’une matrice par sommet n’est que de 10 flottants. En effet, il s’agit d’une matrice  $4 \times 4$  symétrique. Il n’y a donc que 10 éléments différents.

**Interprétation géométrique** La métrique d’erreur quadratique a également une signification géométrique intéressante. En effet, les surfaces de niveau ou iso-surfaces (surfaces représentant l’ensemble des points de l’espace dont l’erreur par rapport à une matrice d’erreur quadratique vaut une valeur  $\epsilon$  donnée) forment généralement des ellipsoïdes (sauf cas dégénérés). Ceci est illustré par la figure 2.2. Le sommet qui minimise l’erreur est alors le centre de l’ellipsoïde. Le long d’arêtes vives, ces ellipsoïdes sont plutôt allongées car le coût est moindre tant que l’on reste proche d’elles. Un cas dégénéré se caractérise par la non inversibilité de la matrice de la formule (2.7).

**Variante de notation** Une représentation alternative de la matrice d’erreur quadratique, que nous utiliserons par la suite, s’écrit ainsi :

$$\{A_{3 \times 3}, \mathbf{b}_3, c\}_v$$

tel que

$$Q = \left[ \begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{b}^T & c \end{array} \right]$$

Nous appelons ce triplet la quadrique associée à un sommet.

Les trois composants sont définis par rapport à un plan sur le maillage original comme suit.

Soit  $P : ax + by + cz + d = 0$ . Alors on définit :

- $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot [a \ b \ c]$  où  $[a \ b \ c]$  équivaut à la normale unitaire du plan
- $\mathbf{b} = d[a \ b \ c]$
- $c = d^2$

L’évaluation se fait alors par  $\Delta(v) = P_G(v) \cdot A \cdot P_G^T(v) + P_G(v) \cdot \mathbf{b}^T + c$

L’addition de quadriques se fait par composante :  $\{\bar{A}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{c}\}_{\bar{v}} = \{A_1 + A_2, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, c_1 + c_2\}$

Finalement, la minimisation se trouve par  $P_G(\bar{v}) = -\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{A}^{-1}$

Cette définition est parfaitement équivalente à la précédente en termes de résultats calculatoires et en utilisation mémoire. Elle réduit cependant légèrement le temps de calcul (inversion d’une matrice  $3 \times 3$  au lieu d’une matrice  $4 \times 4$ ).

## 2.3 Simplification de maillages avec attributs vectoriels

Suite à l’article [GH97], plusieurs travaux ont présenté des métriques basées sur la QEM, étendant sa définition aux maillages avec attributs vectoriels tels que les normales en un point ou de la couleur.

Concernant l’approche vis-à-vis de la couleur, nous pouvons distinguer deux catégories d’articles qui en traitent.

Premièrement, les articles qui considèrent un attribut de couleur (souvent RGB) par sommet [GH98, Hop99, KCL08] et définissent une métrique locale sur le maillage. Ensuite, les articles qui traitent les couleurs par des textures et des mesures dans un espace de textures ou en pixels-écran [COM98, SSGH01, GCC07].

### 2.3.1 Simplification couleur avec critères locaux

#### Extension QEM dans $\mathbb{R}^{3+m}$

Garland et Heckbert sont les premiers à proposer une extension de leur métrique aux attributs vectoriels. Ils évoquent en particulier les attributs de couleur  $(r, g, b) \in \mathbb{R}^3$  et coordonnées de texture  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Globalement, la portée de leurs travaux se limite aux attributs linéairement interpolés sur le maillage.

Afin de préserver la possibilité de minimisation de l’erreur, les auteurs proposent de mélanger géométrie et propriétés dans les quadriques étendues, en se basant sur le principe de la QEM classique. Soit  $m$  la dimension des propriétés au sommet autres que la géométrie. En considérant un plongement géométrique ( $\mathbb{R}^3$ ) et un attribut de couleur ( $\mathbb{R}^3$ ), on a donc  $m = 3$ .

Désormais, on se place dans l’espace  $\mathbb{R}^{3+m}$  afin d’appliquer les mêmes calculs qu’avec la QEM. Ainsi, avec l’exemple  $m = 3$ , tout triplet de points (donc tout triangle) dans  $\mathbb{R}^6$  définit un plan, calculé à partir des coordonnées  $(x, y, z, r, g, b) \in \mathbb{R}^6$ .

Sans entrer dans les détails, nous pouvons intuitivement comprendre le fonctionnement d’une QEM étendue à ces attributs.

L’erreur est alors définie comme une distance quadratique dans l’espace  $\mathbb{R}^{3+m}$  sur les coordonnées  $\mathbb{R}^{3+m}$  de  $\bar{v}$  dans le plan. Celle-ci peut donc être minimisée selon le même principe que la QEM classique et la propriété d’additivité n’est pas mise en cause.

Cette QEM étendue a deux inconvénients :

- Premièrement, le coût mémoire grandit rapidement. Le nombre de réels à stocker au sein des quadriques est quadratique par rapport à  $m$ , plus précisément  $(4 + m)(5 + m)/2$ .
- Mais le plus surprenant est tout de même la métrique choisie. Le passage à un espace  $\mathbb{R}^m$  abstrait mélange les données et risque de générer des effets de bords visuels. En effet, si  $v'$  est la projection d’un sommet  $v$  sur le plan dans  $\mathbb{R}^6$  défini par trois sommets, l’erreur  $\|v - v'\|$  peut être vue comme une somme de l’erreur géométrique  $\|P_G(v) - P_G(v')\|$  et d’une déviation  $\|P_{A_j}(v) - P_{A_j}(v')\|$  dans l’espace des attributs<sup>3</sup>. Ici,  $P_G(v')$  ne correspond pas à la projection orthogonale de  $P_G(v)$  sur le plan dans  $\mathbb{R}^3$  formé par ces trois sommets. De façon générale, un sommet n’est pas comparé géométriquement à son projeté orthogonal

---

3. où  $P_{A_j}(v)$  est l’attribut  $j$  associé au sommet  $v$

sur un plan mais à un point plus éloigné dont l'écart en attributs est moindre. Ceci pourrait sous-estimer l'erreur réelle.

De plus, les données peuvent être de proportion différente (des coordonnées géométriques non contraintes et des couleurs comprises entre 0 et 1 par exemple) et la norme euclidienne n'est pas forcément pertinente sur des données telles que la couleur et les normales et peuvent ainsi influencer obscurément sur d'autres attributs.

### Extension QEM dans $(\mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbb{R}^m)$

*Hoppe* [Hop99] propose alors une QEM étendue qui mesure également une erreur sur la géométrie et les attributs et qui est capable d'être minimisée. La différence avec [GH98] est que l'auteur souhaite séparer l'espace géométrique de l'espace des attributs afin de mesurer une distance réelle dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans cet article, l'erreur géométrique est basée sur une distance géométrique réelle.

L'erreur totale à un sommet  $v$  est donnée par :

$$\Delta(v) = \Delta_G(v) + \sum_{j=1}^m \Delta_{A_j}(v) \quad (2.8)$$

où

- l'erreur géométrique  $\Delta_G(v)$  est la distance euclidienne quadratique du sommet  $P_G(v)$  à son projeté orthogonal  $P_G(v')$  sur le plan  $P \subset \mathbb{R}^3$  qui contient une face donnée ;
- l'erreur en attributs  $\Delta_{A_j}(v)$  est la déviation quadratique de  $P_{A_j}(v)$  à la valeur d'attributs attendue  $P_{A_j}(v')$ , interpolée sur la face au point projeté  $P_G(v')$ . Elle est donc fonction du placement géométrique de  $v$ .

L'erreur géométrique quadratique peut s'écrire à l'aide de quadriques étendues à la dimension  $m + 3$  ainsi :

$$\{A, b, c\}_G = \left\{ \left( \begin{array}{c|ccc} \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{n} & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} d\mathbf{n} \\ 0 \end{array} \right), d^2 \right\}$$

où les lignes séparatrices distinguent les 3 premières lignes et colonnes du reste de la matrice et où  $\mathbf{n}$  est la normale au plan dans  $\mathbb{R}^3$ .

L'erreur quadratique pour tout attribut  $j$  s'écrit également à l'aide de quadriques de même dimension<sup>4</sup> :

$$\{A, b, c\}_j = \left\{ \left( \begin{array}{c|ccc} \mathbf{g}_j^T \mathbf{g}_j & \cdots & 0 & \cdots & -\mathbf{g}_j^T & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -\mathbf{g}_j & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} d_j \mathbf{g}_j^T \\ 0 \\ -d_j \\ 0 \end{array} \right), d_j^2 \right\}$$

où la valeur 1 apparaît dans  $A_{3+j,3+j}$ .

Remarquons que les matrices sont non creuses dans les lignes et colonnes  $j$  et 1 à 3. Cela veut dire que l'écart en attribut  $j$  dépend des valeurs de l'attribut  $j$  ainsi que de la géométrie. Ceci est logique vu la façon dont a été défini cet écart.

4. voir l'article [Hop99] pour connaître la façon dont ces matrices sont construites.

L'équation (2.8) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\Delta(v) &= (P_G(v)A_G P_G^T(v) + 2P_G(v)\mathbf{b}_G^T + c_G) + \sum_{j=1}^m (P_{A_j}(v)A_j P_{A_j}^T(v) + 2P_{A_j}(v)\mathbf{b}_{A_j}^T + c_{A_j}) \\ &= P(v)AP^T(v) + 2P(v)\mathbf{b}^T + c\end{aligned}$$

$$\text{où } \{A, \mathbf{b}, c\} = \{A_G + \sum_{j=1}^m A_j, \mathbf{b}_G + \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j, c_G + \sum_{j=1}^m c_j\}.$$

Cette formule est donc quadratique sur les  $3 + m$  attributs de  $P(v)$  et se définit par une quadrique.

Ces quadriques sont désormais utilisables exactement comme celles de la QEM classique. Les propriétés d'*additivité* et de *minimisation* y sont vérifiées.

En tout, cette représentation ne requiert que  $11 + 4m$  coefficients, ce qui est linéaire en  $m$ .

Une implantation plus subtile et efficace a été proposé par *Hoppe* dans un *addendum* à cet article présenté un an plus tard [HMM00]. Celle-ci ne modifie pas le principe.

### Autres métriques sur les attributs

Finalement, *Kim, Choi* et *Lee* [KCL08] proposent une métrique pour un maillage qui, en plus de la géométrie, comprend un attribut de couleur RGB au sommet. Leur métrique permet pas de minimisation de l'erreur, donc de positionnement optimal. Ils se limitent à de la semi-contraction :  $(v_1, v_2) \rightarrow v_2$ .

Il suffit alors pour la mise en œuvre de pouvoir évaluer le coût d'une contraction d'arêtes. Pour cela, les auteurs proposent d'utiliser trois termes.

- La QEM classique [GH97] permet de mesurer la distance géométrique
- L'importance visuelle est une métrique propre à un sommet. Elle mesure l'écart en couleur vis-à-vis de ses voisins dans le maillage original. Elle est définie ainsi :

$$I(v_0) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=\text{voisins}} \|P_C(v_0) - P_C(v_i)\|}{\max \|P_C(v_0) - P_C(v_i)\|} & , \text{ si } \max(P_C(v_0) - P_C(v_i)) \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } \max(P_C(v_0) - P_C(v_i)) = 0 \end{cases}$$

où  $\|P_C(v_0) - P_C(v_i)\|$  est la distance Euclidienne sur les couleurs RGB<sup>5</sup>.

Lors d'une contraction, l'importance visuelle du sommet résultant est définie par la somme des importances visuelles de ses ancêtres.

- L'erreur de contraction en couleur pondère un écart en couleur par la longueur de l'arête contractée. Cette métrique nous paraît assez obscure mais elle devrait, d'après les auteurs, évaluer une erreur visuelle en termes de couleurs à la contraction d'une arête. En voici sa définition :

$$C((v_1, v_2) \rightarrow v_2) = \sum_{i=\text{voisins de } v_1} | \|P_C(v_1) - P_C(v_i)\| \|P_G(v_1) - P_G(v_i)\| - \|P_C(v_2) - P_C(v_i)\| \|P_C(v_2) - P_C(v_i)\| |$$

---

5.  $P_C(v)$  définit le plongement de couleur du sommet  $v$

Nous soupçonnons qu’une erreur de frappe s’est glissée dans leur article et qu’en réalité, la métrique est la suivante.

$$C((v_1, v_2) \rightarrow v_2) = \sum_{i=\text{voisins de } v_1} | \|P_C(v_1) - P_C(v_i)\| \|P_G(v_1) - P_G(v_i)\| - \|P_C(v_2) - P_C(v_i)\| \|P_G(v_2) - P_G(v_i)\| |$$

Cette grandeur mesurerait l’écart entre, d’une part, la similarité de la couleur du sommet  $v_0$  avec celles de son voisinage, d’autre part la similarité de la couleur de ces mêmes voisins avec les couleurs de leur nouveau voisin  $v_1$  ; tout en pondérant ces écarts par les longueurs d’arêtes respectives.

Ainsi, même si cela reste mal justifié, nous y reconnaissons une idée qui pourrait être raisonnable.

Le coût total associé à une contraction  $(v_1, v_2) \rightarrow v_2$  est défini par :

$$(1 + QEM) \cdot (1 + \text{importance visuelle}) \cdot (1 + \text{erreur couleur})$$

Remarquons qu’il faut considérer deux contractions par arête car les erreurs sont non symétriques :  $(v_1, v_2) \rightarrow v_1$  et  $(v_1, v_2) \rightarrow v_2$ .

**Espaces de couleur** Les auteurs de l’article suggèrent de passer leur métrique dans un autre espace de couleur, tel que *CIE – Lab* ou *XYZ*. Les distances dans ces espaces correspondent en effet plus à la réalité visuelle qu’une distance euclidienne en *RGB*

**Conclusion** Cette métrique, même si elle fonctionne correctement, nous paraît surprenante. En particulier l’erreur de contraction en couleur est mal justifiée et en plus, les comparaisons des résultats y sont fait par rapport à l’article [GH98], alors que [Hop99] est largement meilleur pour une simplification de maillage avec géométrie et couleur aux sommets.

### 2.3.2 Simplification couleur par textures

Même si nous envisageons éventuellement d’utiliser des textures dans le futur, ces articles ne nous intéressent guère dans le cadre de ce mémoire. Cependant, il est intéressant d’observer que les métriques [COM98, SSGH01, GCC07] se basent toutes sur la QEM classique pour la géométrie.

D’abord elles associent une priorité aux arêtes en fonction de l’erreur géométrique de la QEM. Ensuite, elles utilisent la métrique qui leur est propre en pénalisant certaines arêtes davantage. Finalement, elles placent le sommet par minimisation de l’erreur géométrique et lorsque leur métrique le permet, elles opèrent une minimisation de l’erreur sur les attributs, étant donné la position géométrique.

A titre informatif, voici quelques exemples de métriques qui ont été définies dans ces articles.

[COM98] mesure une déviation en pixels à l’écran vis-à-vis du maillage original et en se basant sur la texture.

[GCC07] pénalise davantage les arêtes qui correspondent à un haut gradient de couleur dans l’image de texture 2D.

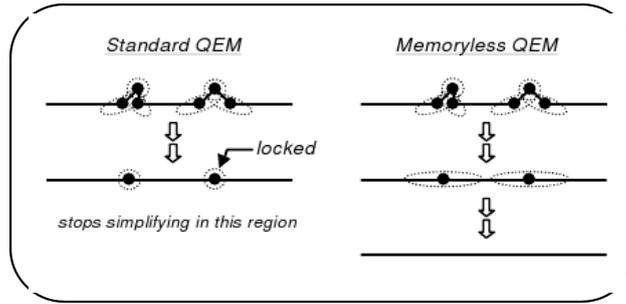


FIGURE 2.3 – Illustration de la simplification « memoryless ». Les ovales en pointillés représentent une surface de niveau associée aux quadriques. Dans la version cumulative (à gauche), les quadriques sont calculées une fois pour toutes avant la simplification et sont sommées à la contraction. Comme illustré, ceci limite la liberté d’un sommet contracté tandis qu’une propriété géométrique du maillage qui a été perdue (ici deux petites bosses), il est inutile de continuer à « préserver » un sommet qui en résulte. La version « memoryless » (à droite) recalcule les quadriques à chaque niveau et ne se soucie ainsi pas de « l’histoire » d’un sommet considéré.

## Simplification « memoryless »

Hoppe [Hop99] propose une variante de calcul de la QEM. Au lieu de sommer les quadriques représentant les plans des triangles constituant le maillage original, il propose de mesurer une distance vis-à-vis du maillage simplifié au moment où une contraction est considérée. Ainsi, les quadriques ne sont jamais sommées et une nouvelle quadrique est définie à chaque sommet issu d’une contraction (ou dont les triangles adjacents ont été modifiés par une contraction) par rapport aux nouveaux plans qui le bordent.

Ceci peut paraître peu intuitif (on se plaît à croire qu’un écart au maillage original est une bien meilleure métrique qu’un écart à un maillage simplifié), mais globalement, le résultat est bon. La figure 2.3 illustre pourquoi dans certaines configurations la version cumulative n’est pas très intéressante.

Cette variante s’applique à tout type de QEM, de la géométrie classique aux versions étendues.

Hoppe obtient avec cette variante des résultats légèrement meilleurs en écart géométrique et couleur par rapport au maillage original.

## 2.4 Conclusion

Même si plusieurs métriques efficaces de simplification de maillages avec attributs de couleur ont déjà été publiés, le problème est loin d’être fermé.

**Récapitulatif des articles** [Hop96] établit les fondements de la simplification efficace de maillages surfaciques en rappelant les différentes applications possibles, puis en introduisant un algorithme de simplification qui répond aux besoins de ces applications. Son algorithme est basé sur la contraction d’arêtes et une métrique d’erreur qui y est associée. Il aura été réutilisé par de nombreux chercheurs par la suite.

Différentes métriques d’erreur ont été produites afin de simplifier des maillages de différents types.

- Maillages surfaciques avec plongement géométrique
  1. La métrique d’erreur quadratique (QEM) [GH97], métrique pionnière pour la géométrie.

- Maillages surfaciques avec plongement géométrique et attributs vectoriels (couleur, normales, coordonnées de texture, etc.).
  1. La métrique d'erreur quadratique étendue [GH98] à un espace comprenant géométrie et attributs.
  2. La métrique d'erreur quadratique étendue [Hop99] mesurant une erreur en considérant un espace géométrique  $\mathbb{R}^3$  et un espace d'attributs  $\mathbb{R}^m$  de façon séparée.
  3. La métrique d'erreur sur la géométrie et les couleurs de [KCL08] additionnant une erreur géométrique par QEM avec une mesure sur la couleur.
  4. Plusieurs métriques ([COM98, SSGH01, GCC07]) s'intéressant à l'écart dans l'espace de texture de couleurs ou en pixels-écran.

**Utilisabilité sur les maillages avec champs de lumière** Les critères d'erreur sur la géométrie nous seront directement utiles pour notre type de maillage.

Les critères d'erreur sur les attributs de couleur au sommet vont nous permettre d'extraire des généralités sur le traitement de la couleur sur un maillage au chapitre suivant. Il sera cependant difficile d'imaginer une QEM étendue aux coefficients de champs de lumière. Nous nous inspirerons davantage des métriques d'addition d'une erreur géométrique avec une erreur de nature différente. En particulier, une séparation entre l'espace géométrique  $\mathbb{R}^3$  et tout autre espace paraît primordiale.

## Contenu

- 3.1 Géométrie**
  - 3.1.1 Simplification naïve et QEM
  - 3.1.2 Contraction optimale et semi-contraction
  - 3.1.3 Quadriques cumulées et version « memoryless »
- 3.2 Couleur**
  - 3.2.1 Contraction optimale et semi-contraction
  - 3.2.2 Évaluation visuelle des métriques
  - 3.2.3 QEM cumulative et QEM « memoryless »
- 3.3 Conclusions**

# Comparaison des méthodes de simplification existantes

Dans ce chapitre nous évaluons les différents algorithmes de simplification de maillages avec attributs de géométrie et de couleur.

Nous extrayons en particulier les avantages et inconvénients des différents critères en fonction de l'application souhaitée et discutons de la pertinence de certains types de simplification telle que la semi-contraction ou la simplification « memoryless ».

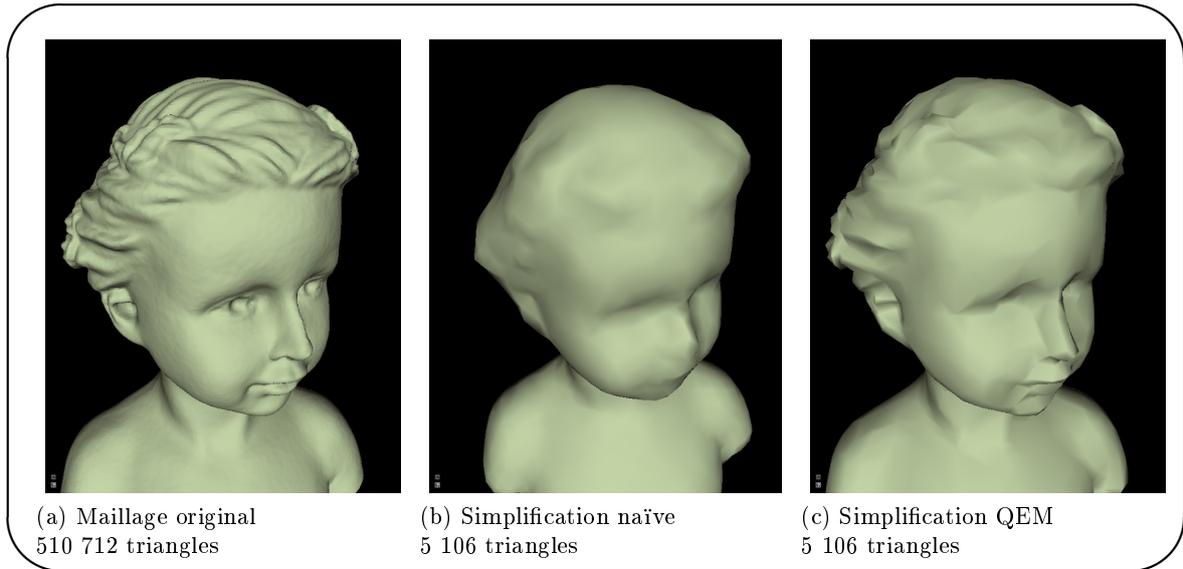


FIGURE 3.1 – Comparaison entre une simplification naïve et une simplification par QEM [GH97].

## 3.1 Géométrie

La QEM est la métrique la plus efficace pour la simplification d'un maillage sans attributs autre que la géométrie que nous avons vu au chapitre 2. Nous pouvons dans un premier temps extraire sa valeur ajoutée par rapport à une simplification naïve, avant de comparer différentes variantes de la QEM.

### 3.1.1 Simplification naïve et QEM

La simplification naïve consiste en une sélection de l'arête par sa longueur (une arête courte est moins visible qu'une arête longue) et un plongement de sommet contracté au milieu de celle-ci.

La figure 3.1 illustre la valeur ajoutée de la QEM. Au lieu de simplifier naïvement, davantage de triangles sont simplifiés dans des zones planes alors que les régions plus significatives géométriquement (les yeux ou le nez dans la figure 3.1 par exemple) sont mieux maintenues.

### 3.1.2 Contraction optimale et semi-contraction

Nous pouvons comparer la version de la simplification par quadriques avec plongement optimal à une version avec semi-contraction.

- Contraction optimale

Il s'agit de la simplification par QEM telle que nous l'avons présentée au chapitre 2. Les quadriques fondamentales sont calculées sur les faces et un sommet se voit attribuer la somme des quadriques fondamentales de ses faces adjacentes. L'erreur calculée est la somme des distances quadratiques à l'ensemble de ces plans et la position d'un sommet contracté est celle qui minimise cette erreur par rapport aux plans entourant ses ancêtres. La quadrique associée au nouveau sommet est la somme des quadriques des deux sommets dont il est issu.

- Semi-contraction

Dans cette dernière version, la nouvelle position d'un sommet contracté est la position d'un de ses prédécesseurs. Ainsi, il n'y a pas de calcul de position optimale. La QEM ne

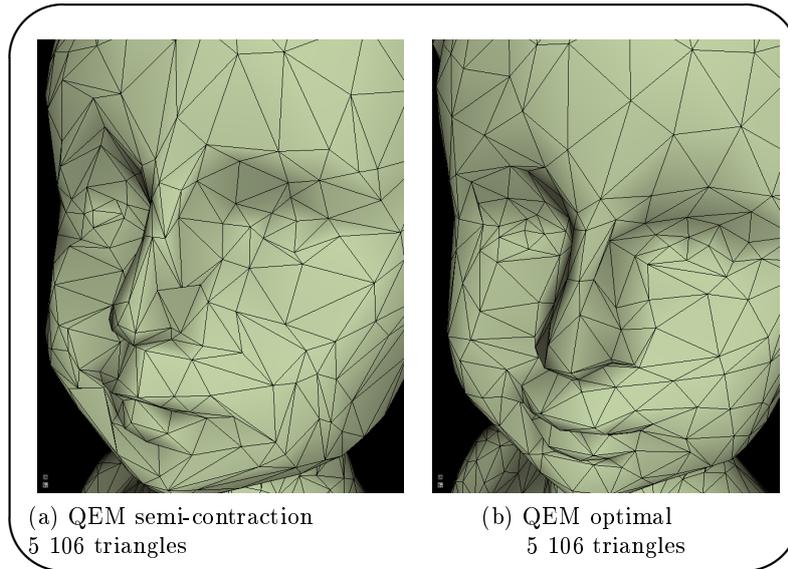


FIGURE 3.2 – Comparaison des simplifications QEM en semi-contraction et en contraction optimale. Le résultat est très proche. La QEM optimale génère des triangles légèrement plus réguliers (moins allongés) sur le nez par exemple.

sert qu'à l'évaluation de l'erreur commise et à choisir parmi les deux sommets de l'arête lors d'une contraction.

Mis-à-part cela, la construction et l'addition des quadriques est identique à ce qui a été présenté précédemment.

Sur un maillage sans attributs autres que la géométrie, il n'y a pas de raison particulière qui nous pousse à préférer l'utilisation de la semi-contraction plutôt qu'un placement optimal. Nous verrons dans la section 3.2 pourquoi cela est différent lorsque l'on considère un attribut de couleur.

**Analyse des différences** La figure 3.2 compare une simplification en semi-contraction avec une simplification par contraction optimale. La seule différence notable est la régularité des maillages. Les triangles de la figure 3.2a sont en effet plus allongés que ceux de son voisin.

Ceci n'est qu'un critère esthétique sur la géométrie du maillage et n'est à priori pas très pénalisant par rapport au résultat final. Cependant, lors d'une simplification extrême (à la limite de la reconnaissance des formes de l'objet), ces différences peuvent devenir visibles. Nous verrons au chapitre 5 que pour nos expérimentations sur les champs de lumière, une simplification extrême n'est pas un but important.

### 3.1.3 Quadriques cumulées et version « memoryless »

La dernière variante que l'on peut analyser sur les maillages géométriques est celle de la simplification « memoryless » étudiée à la page 16. La figure 3.3 nous montre que la simplification « memoryless » est particulièrement intéressante lorsque la simplification est forte, même si cela génère un maillage plutôt hétérogène.

Nous verrons par la suite, notamment au chapitre 4, que cette variante a une importance capitale dans la définition d'un ordre de grandeur de l'erreur.

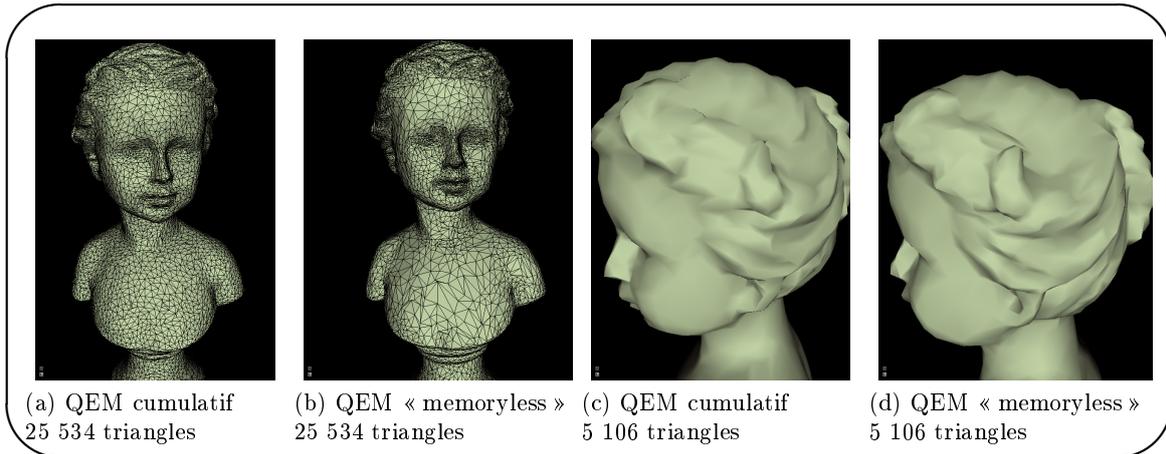


FIGURE 3.3 – Comparaison des simplifications QEM en erreur cumulée et en « memoryless ». Les figures 3.3a et 3.3b montrent que la version « memoryless » simplifie davantage dans des zones planes que la version cumulative, qui répartit un peu plus les contractions sur le maillage. Même si cela n’a que peu d’influence dans les premières étapes de la simplification, cela devient remarquable lorsque l’on atteint un taux de simplification élevé. Les figures 3.3c et 3.3d illustrent cela : il y a encore une assez grande concentration de triangles disponible pour préserver des détails (la corne dans les cheveux par exemple) dans le second maillage contrairement au premier.

## 3.2 Couleur

Pour simplifier un maillage avec attributs de couleur aux sommets, une approche naïve consiste à simplifier la géométrie par la QEM et à interpoler les couleurs en fonction du placement géométrique.

Nous avons vu au chapitre 2 deux autres métriques efficaces et applicables aux maillages avec attributs aux sommets.

- [Hop99]  
QEM étendue aux attributs vectoriels, avec mesure des écarts dans des espaces séparés.
- [KCL08]  
Métrique multipliant l’erreur géométrique (QEM) et deux autres entités pour la couleur (voir (2.3.1)). La semi-contraction est l’unique option envisagée.

Nous allons comparer ces différentes métriques tout en extrayant les propriétés des différents types de contraction.

### 3.2.1 Contraction optimale et semi-contraction

Avec les attributs de couleur, un problème conceptuel se pose. Doit-on, lors d’une contraction d’une arête, effectuer un mélange des couleurs des sommets de l’arête ? Si nous répondons oui, cela veut dire que l’on s’autorise à créer de nouvelles couleurs.

La crainte qui nous anime ici est double.

- Créer une nouvelle couleur pourrait être très visible sur certains maillages, en particulier lorsque l’on rencontre une séparation nette entre deux couleurs très distinctes.
- Une nouvelle couleur, interpolant celle de ses ancêtres aurait l’effet de flouter les motifs.

Nous ne sommes pas capables, à priori, d’affirmer qu’il faille mieux s’abstenir de mélanger ou pas. À distance, un effet de dégradé ne se verra pas, ou ne paraîtra du moins pas choquant. De près, cela peut fortement gêner.

Pour analyser ce problème, nous avons comparé les métriques suivantes :

- Simplification « basique » avec plongement optimal qui interpole les couleurs ;
- QEM étendue aux couleurs ([Hop99]) avec plongement optimal ;
- QEM étendue aux couleurs ([Hop99]) avec semi-contraction ;
- Mesure de l’erreur via [KCL08] et semi-contraction.

Nous avons effectué deux types de tests afin d’extraire au mieux les propriétés des simplifications étudiées.

1. D’une part, nous avons comparé les simplifications par les différentes métriques qui traitent la couleur sur des maillages scannés.

Des résultats de ces simplifications sont visibles dans les figures de la page 25.

L’effet de création de couleur est bien réel et remarqué sur les simplifications optimales lorsque l’on regarde de près (figure 3.5). En observant de plus loin (figure 3.6), l’effet n’est pas du tout visible.

En contrepartie, la simplification par semi-contraction a également un effet indésirable. En particulier dans la simplification représentée par la figure 3.6d, les couleurs « bavent » (font des écarts très visibles). Ceci est probablement dû au fait que la simplification par semi-contraction génère des triangles moins homogènes (voir page 20). Ainsi, deux sommets d’un triangle sont plus souvent éloignés l’un de l’autre et la couleur interpolée sur le triangle peut influencer sur une face plus grande.

2. Ensuite, nous avons souhaité évaluer ces différences sur des maillages synthétiques, avec des séparations nettes de couleurs, tel que dans les figures de la page 26.

Avec ces tests, nous étudions la qualité des métriques sur des configurations critiques, en particulier sur un seuil de couleur.

De façon générale, les seuils de couleur sont bien maintenus avec les trois méthodes étudiées. La technique [KCL08] est un peu plus performante dans le maintien du grand dégradé de la figure 3.8. Pour cela, davantage de triangles sont nécessaires, ce qui pénalise légèrement le maintien de la cohérence géométrique.

La création de nouvelles couleurs avec la technique [Hop99] en plongement optimal, qui se traduit par la création d’un dégradé à la place d’un seuil net, n’est pas gênant sur ces simplification.

Remarquons finalement que le large dégradé de couleurs de la figure 3.8 est très bien maintenu mais que la géométrie en paye le prix. Beaucoup de triangles sont en effet nécessaires sur toute la zone de dégradé et ainsi, moins de triangles sont maintenus sur des zones géométriquement critiques.

### 3.2.2 Évaluation visuelle des métriques

Les images des figures des pages 25 et 26 nous permettent de comparer les métriques.

Premièrement, nous pouvons affirmer que la valeur ajoutée des trois dernières métriques est évidente vis-à-vis de la métrique naïve. Cette dernière détruit totalement les ombres et les motifs alors que le tout est nettement mieux préservé avec les autres métriques.

Comme nous avons pu l’évoquer, la métrique en contraction optimale [Hop99] peut générer un effet gênant localement à cause de la création de couleur. Cependant, elle est probablement la plus pertinente dans la préservation de la forme globale des ombres et motifs, et donc de l’aspect global.

Parmi les techniques de simplifications par semi-contraction, celle de [KCL08] ne génère pas de « bavement » contrairement à celle de [Hop99], et elle maintient mieux le grand dégradé de la figure 3.8. En contrepartie, [Hop99] en semi-contraction maintient davantage certains motifs tel que la grappe de raisins sur le vase grec.

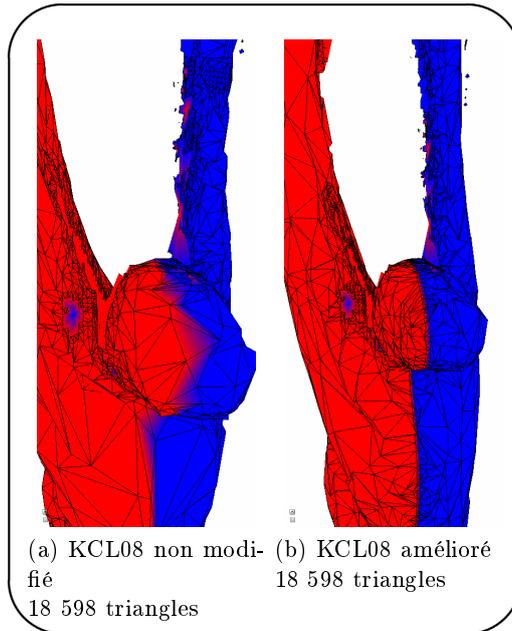


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la métrique [KCL08] et la version améliorée que nous proposons.

Ainsi, nous classons les métriques ainsi :

1. [Hop99] en plongement optimal
2. [KCL08] (semi-contraction)
3. [Hop99] en semi-contraction
4. algorithme naïf

La simplification « memoryless » est étudiée ci-dessous. Les différences générées ne sont pas particulièrement déterminant pour départager nos métriques, d'où nous ne les avons pas mentionnées dans cette partie.

### 3.2.3 QEM cumulative et QEM « memoryless »

Ici à nouveau, un problème fondamental se présente à nous. La métrique de [KCL08] mesure l'écart géométrique par la QEM et l'écart en couleurs par d'autres moyens. Dans l'article, la simplification « memoryless » n'est pas mentionnée.

Nous souhaitons toutefois ouvrir un débat à ce sujet. La version cumulative de la QEM calcule l'erreur aux plans du maillage original (en cumulant les quadriques). Cependant, l'une des métriques de mesure de l'erreur en couleur, l'*erreur de contraction en couleur*, est recalculée à chaque niveau de simplification du maillage. Cela a inévitablement pour effet de modifier le rapport de force entre l'erreur en géométrie et l'erreur sur la couleur.

Pourquoi l'erreur de contraction en couleur serait-elle moins importante vis-à-vis de la géométrie sur un maillage plus grossier ?

La figure 3.4 compare la version standard de la simplification selon [KCL08] avec une version modifiée par nos soins<sup>1</sup>. Dans notre version, la QEM est « memoryless ». Par homogénéité, nous avons également modifié l'*importance visuelle* telle que celle-ci soit recalculée à chaque étape

1. Les images des figures aux pages 25 et 26 ont volontairement été obtenues par la version modifiée car elles génèrent de meilleurs résultats

de simplification, et non plus cumulée. Au vu des différences entre la méthode originale et la méthode modifiée, il serait intéressant d'étudier ce problème plus amplement afin d'améliorer la métrique couleur.

Nous retiendrons le problème conceptuel qui se pose lors du mélange d'une métrique qui cumule un écart au maillage initial avec un écart au maillage courant.

### 3.3 Conclusions

#### Comparaison des métriques

Les tests effectués sur les différentes métriques nous montre que la QEM est pertinente sur la géométrie lorsque l'on pratique la contraction optimale. En général, la semi-contraction génère des maillages moins homogènes.

Les meilleurs résultats concernant la simplification d'un maillage avec attributs de couleur sont obtenus avec la méthode de QEM étendue (avec séparation de l'espace géométrique) en contraction optimale. Cependant, la méthode de [KCL08] fonctionne bien également par rapport à la méthode [Hop99] pour la semi-contraction. Malgré un maillage moins régulier, la simplification est très raisonnable.

Nous ne savons malheureusement pas quels aspects intéressants extraire de la méthode [KCL08] en vue d'une application aux maillages avec champs de lumière. Ceci est dû au fait qu'elle est mal justifiée et qu'elle ne nous paraît pas finalisée : dans l'article elle n'est notamment pas comparée à la métrique de [Hop99]. Les idées qui semblent être derrière ces métriques peuvent cependant s'avérer intéressantes.

Elle peut en outre nous instruire concernant la validité d'une métrique associant la QEM à une entité de nature différente.

#### Contraction optimale sur la couleur

Le mélange de couleurs génère bien des couleurs qui peuvent se faire remarquer lorsque l'on observe le maillage de près et lors de simplifications très fortes.

Cependant, nous n'en apercevons que peu lorsque l'on observe le maillage à distance et l'aspect global de l'objet est mieux préservé avec une technique de simplification qui mélange les couleurs ([Hop99]). Nous estimons donc qu'un mélange de couleurs (voir de champs de lumière) n'est pas à écarter à priori.

#### Ordres de grandeur des métriques

Finalement, nous retiendrons le fait que lors de l'association de différentes mesures d'erreur, il faut bien connaître la nature de ces mesures. Mesure-t'on une erreur par rapport au maillage initial ou par rapport au maillage courant, déjà simplifié ? S'autorise-t'on à mesurer une erreur au maillage initial pour certains attributs et par rapport au maillage courant pour d'autres ?

Cette dernière question n'a visiblement pas été étudiée précédemment et méritera notre attention pour la suite.

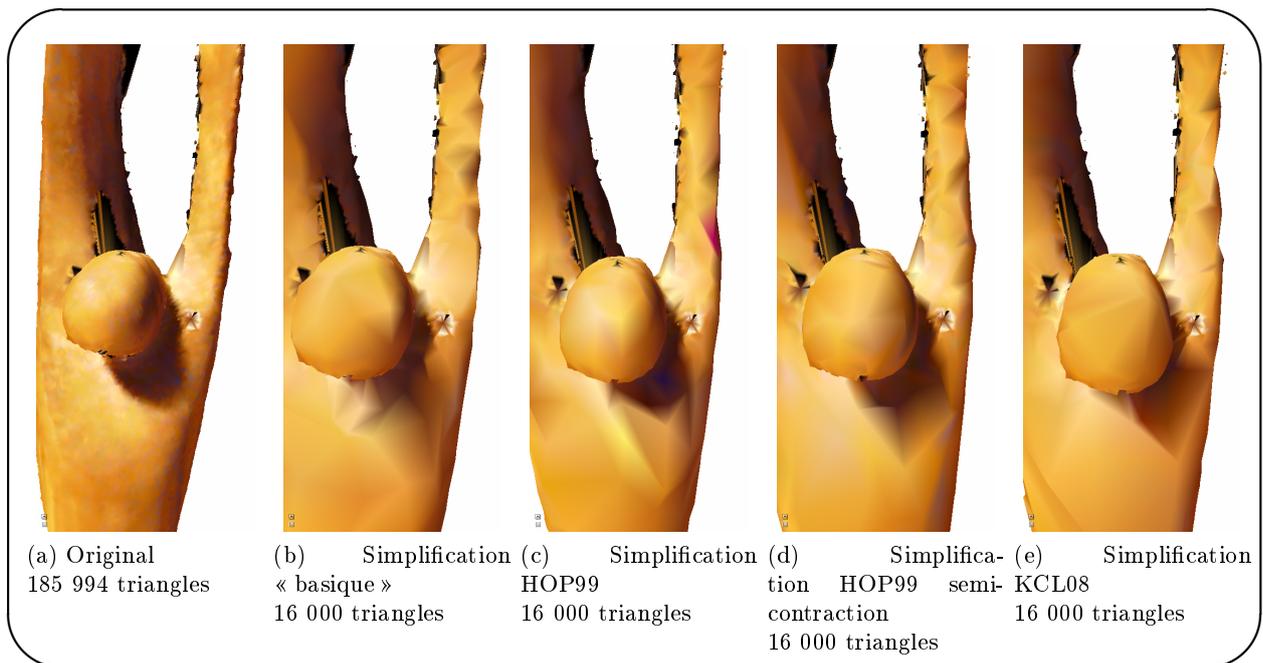


FIGURE 3.5 – Comparaison des simplifications couleur

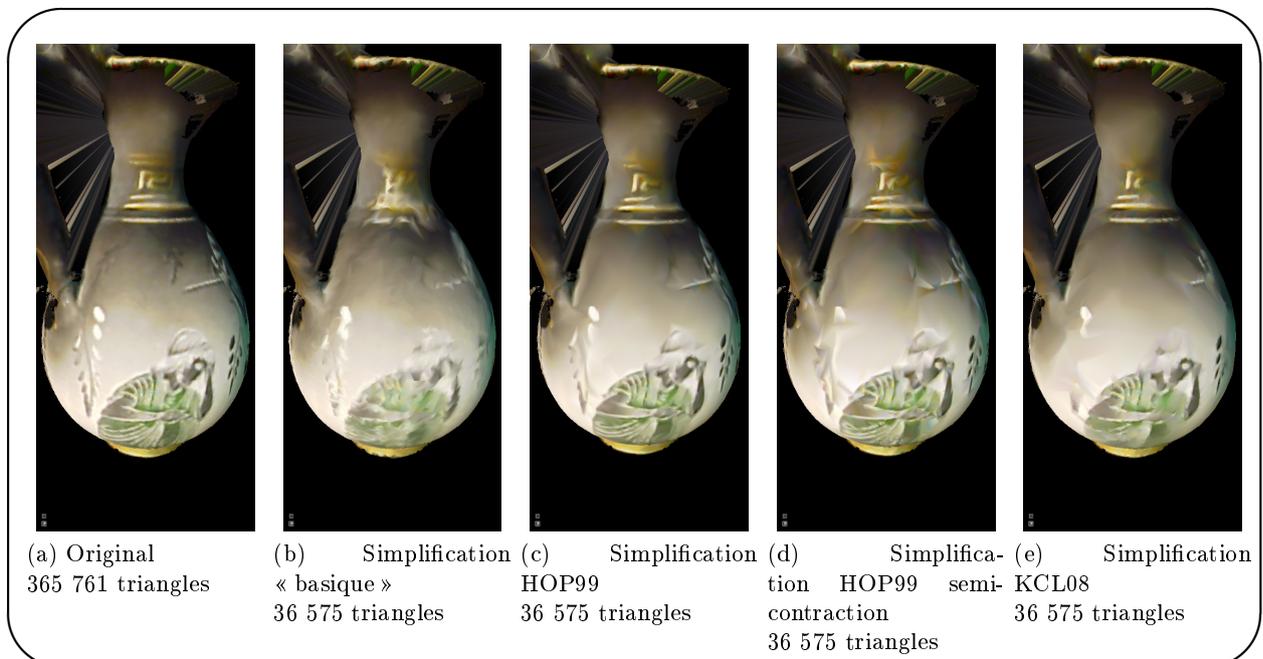


FIGURE 3.6 – Comparaison des simplifications couleur

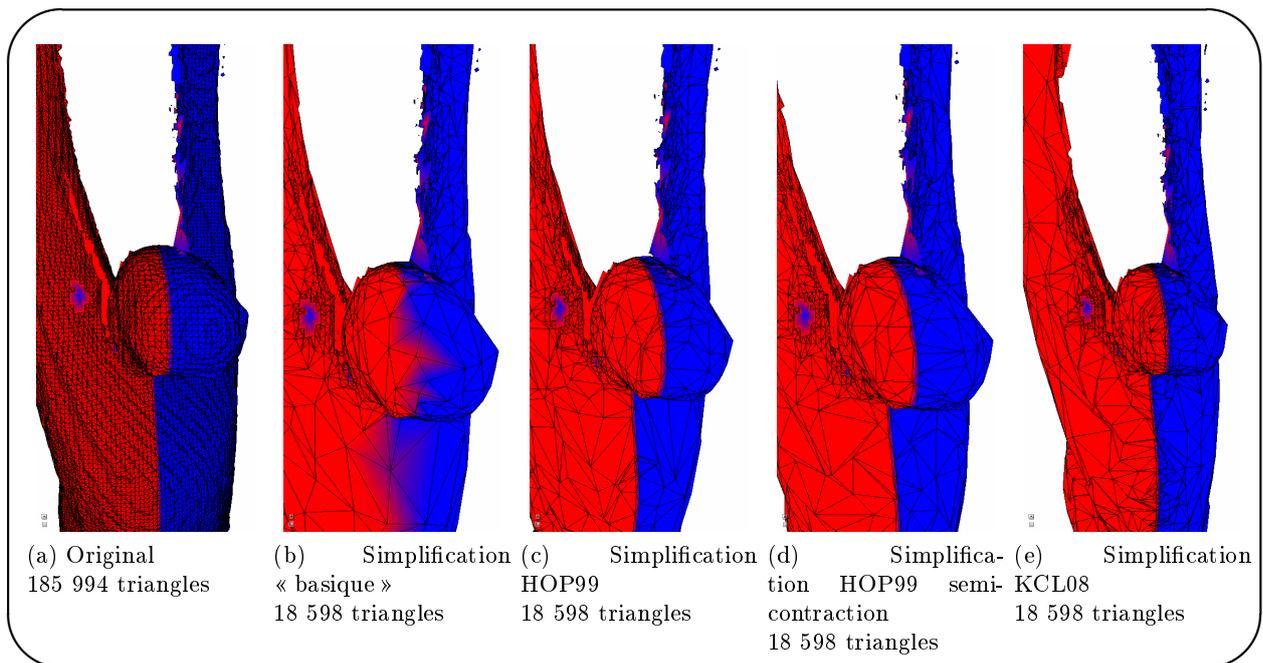


FIGURE 3.7 – Comparaison des simplifications couleur

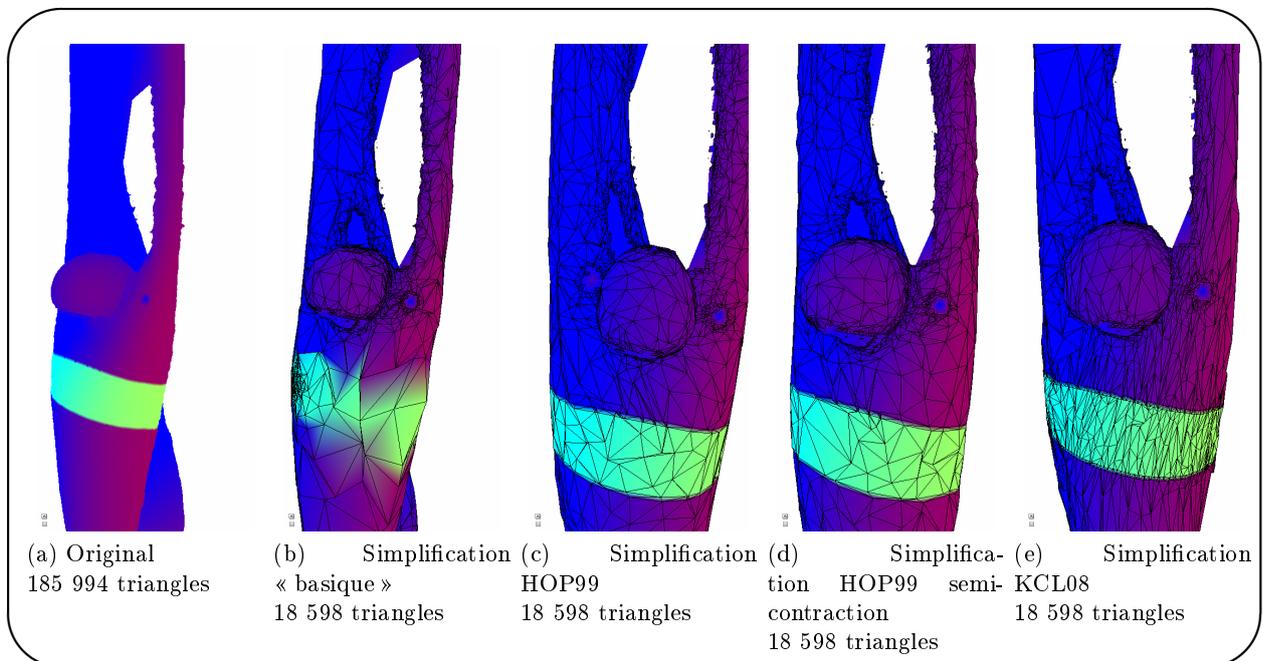


FIGURE 3.8 – Comparaison des simplifications couleur

## Contenu

- 4.1 Métrique d'erreur**
  - 4.1.1 Distance entre champs de lumière
  - 4.1.2 Erreur commise à la contraction
  - 4.1.3 Propriétés
- 4.2 Plongement d'un sommet contracté**
  - 4.2.1 Possibilités de plongement
  - 4.2.2 Définition des plongements
- 4.3 Détails supplémentaires**

# Simplification de maillages avec champs de lumière

Dans ce chapitre nous décrivons les métriques que nous avons définies sur les champs de lumière ainsi que les possibilités de contraction envisagées.

Tout d'abord nous donnons les éléments qui ont dirigés nos choix.

Ensuite nous définissons une métrique d'écart entre champs de lumière. Celle-ci est composée de deux sous-métriques : une sur les fonctions de champ de lumière et une sur l'orientation des plans tangents à la surface au sommet considéré.

Finalement, nous analysons les possibilités de contraction d'arête et de plongement d'un sommet résultant d'une contraction. Nous proposons également des méthodes permettant de calculer tous les scénarios de contraction envisagés, en particulier le calcul de plongement de champs de lumière dit optimal (d'erreur minimale).

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les algorithmes de simplification basés uniquement sur des contractions successives d'arêtes peuvent être efficaces ([GH97]) et sont suffisants et utilisables dans plusieurs optiques ([Hop96]). Nous allons donc reprendre un tel algorithme (voir page 7) et lui fournir les paramètres dont il a besoin : une métrique d'erreur sur une arête et une façon de plonger un sommet contracté.

Nous rappelons qu'à chaque sommet est spécifié un plongement géométrique, un repère local représentant un hémisphère visible et une fonction de champ de lumière défini sur cet hémisphère.

## 4.1 Métrique d'erreur

Soient les sommets  $v_1$  et  $v_2$  adjacents à une même arête. Nous souhaitons définir l'erreur  $E((v_1, v_2) \rightarrow \bar{v})$  à y associer. Celle-ci devra être petite lorsque sa contraction passe inaperçue visuellement et grande sinon.

Pour la géométrie, nous avons vu dans les deux chapitres précédents que la mesure par QEM fonctionne bien. Nous nous baserons donc sur celle-ci.

Pour le champ de lumière, il paraît difficile d'élargir la définition de la QEM, tel que dans [GH98, Hop99] par exemple, aux attributs fonctionnels. De plus, le coût mémoire serait de toute façon très grand vu le nombre d'éléments définissant un champ de lumière. Ainsi, nous allons totalement séparer l'erreur géométrique de l'erreur de champ de lumière, à l'instar de [KCL08].

Ainsi, afin d'établir leur erreur  $E((v_1, v_2) \rightarrow \bar{v})$ , il faut définir les éléments suivants.

- $E_G((P_G(v_1), P_G(v_2)) \rightarrow P_G(\bar{v}))$  : la métrique d'erreur géométrique
- $E_L((P_L(v_1), P_L(v_2)) \rightarrow P_L(\bar{v}))$  : la métrique d'erreur sur les champs de lumière

**Erreur géométrique** Pour mesurer l'erreur géométrique, nous utilisons directement la QEM classique de [GH97]. Nous verrons dans la section 4.1.2 (à la page 31) comment associer cette métrique à la métrique que nous allons définir sur les champs de lumière.

**Erreur sur les champs de lumière** Pour évaluer l'erreur  $E_L$  commise sur les champs de lumière lors d'une contraction, nous allons nous baser sur une notion de distance entre deux champs de lumière.

### 4.1.1 Distance entre champs de lumière

Soient deux champs de lumière  $L_1$  et  $L_2$ , composés respectivement de leurs repères locaux  $F_1$  et  $F_2$  et de leurs fonctions de champ de lumière  $Lff_1$  et  $Lff_2$  décrites dans ces repères. Soient  $H_1$  et  $H_2$  les hémisphères représentant les points de vue possibles dans ces deux repères<sup>1</sup>.

Pour définir l'écart entre  $L_1$  et  $L_2$ , nous pouvons identifier deux entités :

1. L'écart entre fonctions de champ de lumière sur l'intersection de leurs domaines de définition.
2. La « quantité » de points de vue qui diffèrent (sur laquelle une fonction est définie et non l'autre).

Une comparaison de deux domaines de définition (hémisphères visibles) orientés différemment est représentée à la figure 4.1.

Définissons l'écart sur ces entités.

---

1. Lorsque nous parlons d'hémisphère  $H$ , nous ne nous soucions pas de la paramétrisation qui y est associée. Ainsi, tout repère dont la normale est identique définit le même hémisphère visible indépendamment des autres vecteurs du repère.

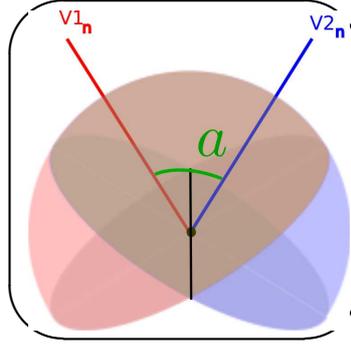


FIGURE 4.1 – Deux champs de lumière orientés différemment ont un ensemble d’angles de vue communs (l’intersection des hémisphères), sur lesquels une couleur est définie pour les deux sommets. D’autre part, on peut distinguer un ensemble de points de vue sur laquelle une fonction est définie et non l’autre.

### Distance entre fonctions de champ de lumière

L’intersection  $H_1 \cap H_2$  des hémisphères de deux sommets définit les points de vue pour lesquels une fonction de champ de lumière est spécifiée sur les deux sommets.

**Transformation de fonctions** Pour mesurer l’écart entre ces fonctions sur leur domaine commun, il faut tout d’abord connaître leurs expressions dans un repère commun.

Les explications et calculs associés aux transformations de fonctions sont assez complexes et fastidieuses à suivre. C’est pourquoi nous avons préféré les regrouper en annexe (annexe A)<sup>2</sup>. Supposons que l’on sache exprimer les parties de fonctions de  $Lff_1$  et  $Lff_2$  correspondant aux points de vue communs, dans un repère définissant l’hémisphère  $H_1$ . Nous avons alors les fonctions  $Lff'_1$  et  $Lff'_2$  décrites dans un repère commun  $F'_1$  dont le plan  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  est le plan équatorial de  $H_1$ .

Ce repère n’est pas forcément  $F_1$  même s’il représente le même hémisphère. En effet, un des vecteurs qui oriente le plan tangent (le vecteur  $\mathbf{i} \in F'_1$  en l’occurrence) est aligné sur l’intersection des plans tangents aux sommets  $v_1$  et  $v_2$  afin de faciliter la description numérique du domaine commun dans le repère  $F'$  (voir calculs dans l’annexe A). Ainsi, le paramétrage dans le plan tangent peut être différent de  $F_1$  à  $F'_1$  alors que la normale est identique.

**Écart sur le domaine commun** Nous souhaitons définir l’écart entre deux fonctions sur le domaine commun  $H_1 \cap H_2$ .

L’écart le plus intuitif entre fonctions surfaciques s’écrit ainsi :

$$D(Lff'_1, Lff'_2) = \sqrt[p]{\iint_{(H_1 \cap H_2)} \|Lff'_1 - Lff'_2\|^p dh}$$

où  $h$  est la portion de surface unitaire et où  $(H_1 \cap H_2)$  est exprimé, tout comme  $Lff'_1$  et  $Lff'_2$ , dans le repère  $F'_1$ .

Il s’agit d’une intégrale surfacique de norme  $p$  non fixée à priori.

Alors que les normes  $p = 1$ ,  $p = 2$  ou encore  $p = \infty$  paraissent envisageables, nous choisissons la norme  $p = 2$ , pour plusieurs raisons :

2. Les équations (A.1) et (A.3) en sont les résultats principaux.

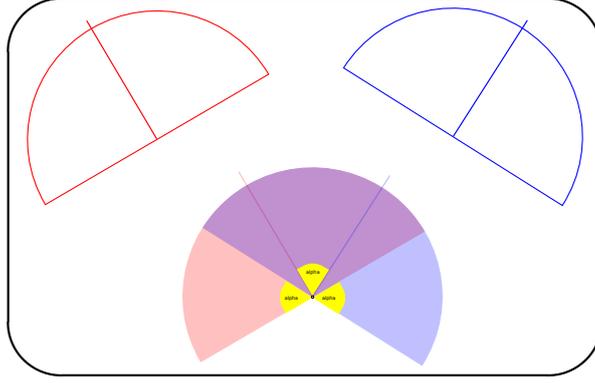


FIGURE 4.2 – La quantité de points de vue perdus lors d’une contraction vaut  $H_1 \setminus H_2$ . L’angle alpha (jaune), nous permet de caractériser cette quantité. En effet, si l’axe polaire du nouvel hémisphère se trouve dans le même plan que les axes polaires des deux hémisphères originaux, cette quantité est représentée par alpha. L’angle alpha correspond à l’angle d’écart entre les normales.

- Elle nous dispense de calculer la valeur absolue.
- Dans l’optique de pouvoir minimiser l’erreur, à l’instar de la QEM, une forme quadratique sur les coefficients de la fonction de champ de lumière est particulièrement judicieuse. Nous verrons dans la section 4.2 à la page 34 que l’on pourra effectivement minimiser cet écart. Ainsi, la formule résultante est la suivante.

$$D^2(Lf f'_1, Lf f'_2) = \iint_{(H_1 \cap H_2)} (Lf f'_1 - Lf f'_2)^2 dh \quad (4.1)$$

### Distance entre orientations des plans tangents

Nous souhaitons quantifier à quel point l’orientation de deux hémisphères diffère. La figure 4.2 nous montre que cette quantité dépend de l’angle séparant les normales.

Afin d’être en cohérence avec l’écart sur les fonctions de champ de lumière, nous définissons la quantité de points de vue qui diffèrent comme étant le complément sur l’hémisphère de l’ensemble des points de vue communs, donc  $H_1 \setminus H_2$ . Pour maintenir cette même cohérence, nous définissons qu’un point de vue différent équivaut, dans sa mesure d’écart, à un point de vue commun dont l’écart est maximal (la différence entre deux valeurs numériquement opposées d’un canal de l’espace de couleur).

Ainsi, la distance sur l’orientation des plans tangents est défini par :

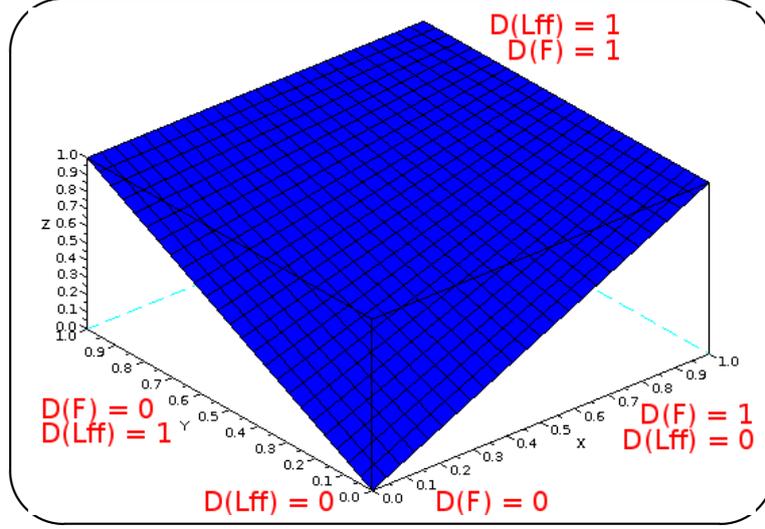
$$D^2(F_1, F_2) = \iint_{H_1 \setminus H_2} D_{max}^2 dh \quad (4.2)$$

Cette métrique est définie directement par l’angle entre les axes polaires  $\alpha$ . Elle vaut précisément<sup>3</sup> :

$$\iint_{H_1 \setminus H_2} D_{max}^2 dh = \int_0^\pi \int_0^\alpha D_{max}^2 d\theta \sin(\phi) d\phi = 2\alpha D_{max}$$

Nous verrons dans la section 4.1.2 que cette métrique n’a pas été choisie au hasard, mais bien pour être une bonne représentation de la quantité de points de vue perdus lors d’une contraction d’arête.

3. Cette écriture résulte d’une transformation de la fonction en coordonnées sphériques qui facilitent l’expression des calculs (voir annexe A).



L'axe horizontal  $x$  représente la distance  $D_F^2$  (normalisée entre 0 et 1)  
L'axe en profondeur  $y$  représente la distance  $D_{Lff}^2$  (normalisée entre 0 et 1)  
La hauteur  $z$  représente  $D_L^2$

FIGURE 4.3 – Simulation de la continuité dans l'addition des deux métriques  $D_{Lff}^2$  et  $D_F^2$  sur les champs de lumière

### Intégration des sous-métriques

Nous avons défini les deux erreurs associées aux champs de lumière de façon cohérente. Cela se traduit par le fait que l'addition  $D_{Lff}^2 + D_F^2$  est continue aux extremums, c'est-à-dire dans les configurations suivantes :

- $H_1 = H_2 \Leftrightarrow \alpha = 0$  alors  $D_L^2 = D_{Lff}^2 \in [0, 2\pi D_{max}]$
- Si  $Lff_1 - Lff_2 = 0$  alors  $D_L^2 = 0$
- Si  $Lff_1 - Lff_2 = D_{max}$  alors  $D_L^2 = 2\pi D_{max}$
- $H_1 \cap H_2 = \emptyset \Leftrightarrow \alpha = \pi$  alors  $D_L^2 = 2\pi D_{max}$

La figure 4.3 illustre cette continuité.

Nous définissons la distance sur les champs de lumière par la formule suivante.

$$D_L^2(L_1, L_2) = D_{Lff}^2(Lff_1, Lff_2) + D_F^2(F_1, F_2) \quad (4.3)$$

#### 4.1.2 Erreur commise à la contraction

Maintenant que nous avons défini une distance entre deux champs de lumière, définissons l'erreur commise en cas de contraction d'une arête.

Soit le champ de lumière  $\bar{L}$  de repère local  $\bar{F}$  et de fonction  $\bar{Lff}$  que l'on aura défini comme résultant de la contraction des champs de lumière  $L_1$  et  $L_2$ . L'hémisphère  $\bar{H}$  est l'hémisphère visible.

Nous verrons dans la section 4.2 comment définir une nouvelle fonction. Pour le moment, nous nous abstenons de faire des hypothèses sur le nouveau champ de lumière sauf une : le nouvel hémisphère doit minimiser la quantité de points de vue perdus. Cela veut dire que l'on exige que  $(H_1 \cap H_2) \subset \bar{H}$  et que  $\bar{H} \subset H_1 \cup H_2$ . Grâce à cette hypothèse, notre métrique sur la quantité de points de vue perdus est constant par rapport au nouveau repère choisi. En

effet, avant contraction, l'ensemble des points de vue est quantifié par  $H_1 \cup H_2$  alors qu'après, exactement un hémisphère  $\overline{H}$  de points de vue seront définis. La quantité perdue est ainsi toujours  $(H_1 \cup H_2) \setminus \overline{H}$ , avec  $\overline{H} \subset H_1 \cup H_2$  et  $H_1 \cap H_2 \subset \overline{H}$ .

Nous souhaitons que l'erreur minimale se produise lorsque notre nouveau champ de lumière soit le plus proche possible par rapport à notre métrique des deux anciens. Ainsi, nous définissons l'erreur commise en cas de contraction par la somme des écarts entre le nouveau champ de lumière et les deux anciens :

$$E_L^2((L_1, L_2) \rightarrow \overline{L}) = D_L^2(\overline{L}, L_1) + D_L^2(\overline{L}, L_2) \quad (4.4)$$

**Métrique finale** Finalement, nous additionnons cette erreur sur les champs de lumière avec l'erreur géométrique, éventuellement pondéré d'un facteur  $\eta$  à la guise de l'utilisateur.

$$E_v^2((v_1, v_2) \rightarrow \overline{v}) = \eta \cdot E_G^2((v_1, v_2) \rightarrow \overline{v}) + (1 - \eta) \cdot E_L^2((v_1, v_2) \rightarrow \overline{v}) \quad (4.5)$$

### 4.1.3 Propriétés

Nous allons voir qu'avec la métrique choisie, il est possible de définir le nouveau champ de lumière tel qu'il minimise l'erreur commise lors d'une contraction.

La formule (4.4) nous donne cette erreur pour  $(L_1, L_2) \rightarrow \overline{L}$ . Celle-ci est une addition de l'écart sur les points de vue et de l'écart sur les fonctions pour les points de vue communs.

Par construction, nous avons contracté l'hémisphère représenté par le repère  $\overline{F}$  à minimiser la quantité de points de vue perdus. C'est pourquoi l'écart sur les points de vue est constant par rapport à  $\overline{F}$ .

**Forme quadratique** L'écart sur les fonctions peut cependant s'écrire sous une forme quadratique par rapport aux scalaires qui déterminent  $\overline{L}ff$ .

Au vu de la définition d'une fonction de champ de lumière donnée à la page 5, la formule

(4.1) peut être réécrite ainsi<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}
D_{Lff}^2(\overline{Lff}, Lff_k) &= \iint_{(\overline{H} \cap H_k)} \left( \sum_t \overline{a}_t \phi_t(h) - \sum_t a_{k_t} \phi_t^\alpha(h) \right)^2 dh \\
&= \iint_{(\overline{H} \cap H_k)} \left( \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(h) \\ \vdots \\ \phi_n(h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{k_1} & \cdots & a_{k_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \\ \vdots \\ \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} \right)^2 dh \\
&= \iint_{(\overline{H} \cap H_k)} \left( \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(h) \\ \vdots \\ \phi_n(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(h) \cdots \phi_n(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \vdots \\ \overline{a}_n \end{bmatrix} \\ &+ 2 \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(h) \\ \vdots \\ \phi_n(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \cdots \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_n} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} a_{k_1} & \cdots & a_{k_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \\ \vdots \\ \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \cdots \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \right) dh \\
&= \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} A_k \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \vdots \\ \overline{a}_n \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} \mathbf{b}_k + c_k \\
&\text{où } A_{k(i,j)} = \iint_{(\overline{H} \cap H_k)} \phi_i(h) \phi_j(h) dh. \\
&\text{où } b_k = \iint_{(\overline{H} \cap H_k)} \begin{bmatrix} \phi_1(h) \\ \vdots \\ \phi_n(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \cdots \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} dh \begin{bmatrix} a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_n} \end{bmatrix}. \\
&\text{où } c_k = \begin{bmatrix} a_{k_1} & \cdots & a_{k_n} \end{bmatrix} \iint_{(\overline{H} \cap H_k)} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \\ \vdots \\ \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^\alpha(h) \cdots \phi_n^\alpha(h) \end{bmatrix} dh \begin{bmatrix} a_{k_1} \\ \vdots \\ a_{k_n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Cela donne finalement la formule quadratique sur les coefficients scalaires de la fonction  $\overline{Lff}$  :

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} A_k \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \vdots \\ \overline{a}_n \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \cdots & \overline{a}_n \end{bmatrix} \mathbf{b}_k^T + c_k \quad (4.6)$$

Cette formule peut être représentée par la quadrique  $\{A_k, \mathbf{b}_k, c_k\}$ .

---

4. L'exposant  $\alpha$  dans  $\phi_t^\alpha(h)$  indique un changement de variables nécessaire à la transformation de l'hémisphère permettant de rendre comparable deux fonctions : voir formule (A.9) en annexe.

**Additivité** Tout comme les quadriques de la QEM, nos quadriques sur les champs de lumière sont additives. Ainsi, l'erreur  $E_{Lff}^2((v_1, v_2) \rightarrow \bar{v})$  s'écrit également :

$$\begin{aligned}
E_{Lff}^2((v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}) &= D_{Lff}^2(\overline{Lff}, Lff_1) + D_{Lff}^2(\overline{Lff}, Lff_2) \\
&= [\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] A_1 \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} + 2[\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] \mathbf{b}_1^T + c_1 \\
&+ [\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] A_2 \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} + 2[\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] \mathbf{b}_2^T + c_2 \\
&= [\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] (A_1 + A_2) \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} + 2[\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^T + (c_1 + c_2)
\end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant les quadriques produites par  $Lff_1$  et  $Lff_2$ , on écrit la somme des erreurs sous une forme quadratique sur les coefficients  $\bar{a}_t$  de la fonction de champs de lumière.

**Minimisation** Cette forme quadratique permet de trouver les coefficients  $\bar{a}_t$  tel que la mesure ci-dessus soit minimale. Il suffit pour cela d'annuler le gradient sur les coefficients scalaires  $\bar{a}_t$  de la fonction :

$$\begin{aligned}
\nabla(E_{Lff}^2) &= 0 \\
\Leftrightarrow 2[\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] A + 2\mathbf{b} &= [0, \dots, 0] \text{ où } \{A, \mathbf{b}, c\} = \{A_1 + A_2, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, c_1 + c_2\} \quad (4.7) \\
\Leftrightarrow [\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_n] &= -\mathbf{b}A^{-1}
\end{aligned}$$

## 4.2 Plongement d'un sommet contracté

**Mélange de champs de lumière** Nous n'avons pas encore abordé le problème de l'intérêt de minimiser l'erreur sur les champs de lumière. En minimisant cette erreur, le problème se pose de créer de nouveaux champs de lumière, donc de nouvelles couleurs<sup>5</sup>.

Nous avons conclu que malgré que cela puisse être déroutant d'apercevoir de nouvelles couleurs lorsque l'on observe un objet de près, la forme globale des motifs et des ombres était bien maintenue et que de loin, aucun artefact n'était visible. Ainsi, nous ne prohibons pas la création de nouveaux champs de lumière.

Cependant, avec les champs de lumière, nous craignons que l'interpolation depuis deux fonctions atténue les reflets spéculaires. Nos expérimentations nous aideront à répondre aux questions que nous nous posons à ce sujet.

### 4.2.1 Possibilités de plongement

Lors d'une contraction  $(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$ , plusieurs éléments sont à définir :

- $P_G(\bar{v}) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- $P_F(\bar{v}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ .
- $P_{Lff}(\bar{v}) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

---

5. voir discussion sur le mélange de couleurs à la page 21.

## Géométrie

Pour la géométrie, nous utilisons la QEM, en semi-contraction ou avec placement optimal.

### Repère local

Nous avons contraint le nouvel hémisphère  $\overline{H}$  à être inclus dans l'union des deux hémisphères de  $v_1$  et  $v_2$  afin de minimiser les angles de vue perdus (voir page 31). Ainsi, nous pouvons faire de la semi-contraction, en reprenant un des deux repères locaux, ou définir arbitrairement un nouveau repère. Pour qu'un nouveau repère minimise la quantité de points de vue perdus, il faut contraindre l'axe polaire (la normale à la surface au sommet), à être définie dans le même plan que les axes polaires des deux repères originaux et à se situer « entre » ces deux.

Pour cela, nous allons nous donner la possibilité d'interpoler sphériquement les axes polaires des repères  $F_1$  et  $F_2$  :

$$P_N(\overline{v}) = \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(\alpha)} P_N(v_1) + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin(\alpha)} P_N(v_2) \quad (4.8)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre les normales.

Nous optons pour une interpolation sphérique pour deux raisons :

- L'interpolation sphérique préserve la norme du vecteur résultant
- Elle est continue par rapport au paramètre  $t$

Pour choisir le paramètre  $t$ , nous nous basons sur la géométrie choisie pour le nouveau sommet. Nous définissons  $t$  par :

$$t = \frac{\|P_G(\overline{v}') - P_G(v_1)\|}{\|P_G(v_2) - P_G(v_1)\|}$$

où  $\overline{v}'$  est le projeté orthogonal de  $P_G(\overline{v})$  sur l'arête  $(v_1, v_2)$ . Si  $\overline{v}'$  ne se situe pas sur cette arête, on pose  $t = 0$  ou  $t = 1$  suivant la proximité avec  $\overline{v}'$ .

En établissant la contrainte  $t \in [0, 1]$ , nous nous assurons que l'axe polaire de notre nouveau repère se situe entre  $P_n(v_1)$  et  $P_n(v_2)$ .

Une fois  $P_n(\overline{v})$  défini, il nous reste à définir les vecteurs  $P_i(\overline{v})$  et  $P_j(\overline{v})$  tel que  $(P_i(\overline{v}), P_j(\overline{v}), P_n(\overline{v}))$  soit un repère direct et orthonormé. Nous choisissons pour vecteur  $P_j(\overline{v})$  celui qui représente la direction de la droite d'intersection des plans tangents des repères  $P_F(v_1)$  et  $P_F(v_2)$  :

$$P_i(\overline{v}) = P_i(v_1) \wedge P_i(v_2) \quad (4.9)$$

Ce choix est fait afin de servir de base à un repère dans lequel nous pourrions évaluer  $D^2(\overline{Lff}, Lff_1)$  et  $D^2(\overline{Lff}, Lff_2)$  aisément (des explications sont données dans la section 4.2.1 dans l'annexe).

Vu que le vecteur  $P_n(\overline{v})$  se situe dans le plan défini par  $P_n(v_1)$  et  $P_n(v_2)$ , il est toujours perpendiculaire à la droite d'intersection des plans tangents dont  $P_n(v_1)$  et  $P_n(v_2)$  sont les vecteurs normaux respectifs.

Finalement, il nous reste à définir  $P_j(\overline{v})$  ainsi :

$$P_j(\overline{v}) = P_n(\overline{v}) \wedge P_i(\overline{v}) \quad (4.10)$$

Ainsi,  $P_F(\overline{v})$  est défini par  $(P_i(\overline{v}), P_j(\overline{v}), P_n(\overline{v}))$ .

## Fonction de champ de lumière

Pour la nouvelle fonction de champ de lumière, nous nous sommes donnés la possibilité de faire de la semi-contraction en reprenant une fonction parmi  $P_{Lff}(v_1)$  ou  $P_{Lff}(v_2)$ , ou d'opter pour un placement optimal, c'est-à-dire une fonction de champ de lumière qui minimise l'erreur produite par la contraction (que nous avons défini à la page 34).

### 4.2.2 Définition des plongements

Considérons la contraction  $(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$ . Voici comment nous envisageons de définir les attributs du sommet  $\bar{v}$

1. Premièrement, nous plaçons géométriquement le sommet. Dès lors, deux options s'offrent à nous :
  - Semi-contraction :  $P_G(\bar{v}) \in \{P_G(v_1), P_G(v_2)\}$
  - Placement optimal :  $P_G(\bar{v})$  minimisant  $E_G^2((P_G(v_1), P_G(v_2)) \rightarrow P_G(\bar{v}))$
2. Ensuite, nous décidons du nouveau repère local que l'on va attribuer à  $P_F(\bar{v})$ .
  - Soit par semi-contraction :  $P_F(\bar{v}) \in \{P_F(v_1), P_F(v_2)\}$
  - Soit par interpolation sphérique :  $P_F(\bar{v}) = slerp(P_N(v_1), P_N(v_2), P_G(\bar{v}))$
3. Finalement, nous définissons la fonction de champ de lumière  $P_{Lff}(\bar{v})$ .
  - Soit par semi-contraction :  $P_{Lff}(\bar{v}) \in \{P_{Lff}(v_1), P_{Lff}(v_2)\}$
  - Soit par placement optimal :  $P_{Lff}(\bar{v})$  qui minimise  $E_{Lff}^2((P_{Lff}(v_1), P_{Lff}(v_2)) \rightarrow P_{Lff}(\bar{v}))$

Certaines combinaisons ont bien évidemment plus de sens que d'autres. Nous allons voir au chapitre 5 lesquelles nous allons envisager.

## 4.3 Détails supplémentaires

**Cumul des erreurs** Les champs de lumière ne s'adaptent pas à un calcul cumulatif. En effet, si nous voulons comparer plus de deux champs de lumière, il faut les évaluer dans des repères communs deux-à-deux. Outre le fait que ce calcul serait très complexe à définir, il serait de plus très coûteux.

Notre métrique n'est donc définie que par rapport au maillage et aux champs de lumière courants.

Ainsi, nous relevons le même problème qu'avec la métrique de [KCL08] (voir page 31). Si l'on considère la version cumulative de la QEM, son poids vis-à-vis de la métrique sur les champs de lumière va croître au fur et à mesure de la simplification, ce qui n'est à priori pas souhaitable.

**Contrôle des pondérations** Notre écart entre champs de lumière est borné :  $D_L^2(L_1, L_2) \in [0, 2\pi]$ . Ainsi, la somme  $E_L^2((L_1, L_2) \rightarrow \bar{L}) = D_L^2(\bar{L}, L_1) + D_L^2(\bar{L}, L_2) \in [0, 4\pi]$ . De plus, vu que chaque canal est traité séparément, il faut multiplier cet intervalle par le nombre de canaux  $C$  :

$$E_L^2((L_1, L_2) \rightarrow \bar{L}) \in [0, 4\pi C] \quad (4.11)$$

Dans le cas des couleurs (R,G,B), la borne supérieure vaut ainsi  $12\pi$ .

L'erreur géométrique quant à elle, n'est pas bornée. Cependant, nous pouvons (indirectement) contrôler son ordre de grandeur en normalisant le maillage (tel que la longueur de l'arête moyenne soit l'unité). Ceci nous donnera une information sur l'ordre de grandeur de l'erreur géométrique mais ne garantit pas une borne.

## Contenu

- 5.1 Implantation**
- 5.2 Tests**
  - 5.2.1 Données de test et caractéristiques
  - 5.2.2 Méthodes de simplifications à analyser
- 5.3 Résultats**
  - 5.3.1 Critères de qualité d'un maillage simplifié
  - 5.3.2 Comparaison qualitative des techniques de contraction

# Implantation, tests et résultats

Nous présentons ici les différents tests qui ont été effectués sur les maillages avec champs de lumière et les résultats associés.

Tout d'abord nous évoquons les spécificités de notre implantation des algorithmes de simplification.

Ensuite nous caractérisons les différents maillages qui ont été utilisés ainsi que les tests qui ont été effectués dessus.

Finalement, nous analyserons les résultats obtenus en les exprimant par rapport aux critères de qualité que nous listons au préalable.

## 5.1 Implantation

**Détails techniques** Nous avons implémenté l'algorithme de contraction vu à la page 7 en fournissant une métrique d'erreur et une fonction de définition d'un nouveau plongement à partir d'une arête.

À cette fin, nous avons mis en place :

1. Une classe d'attributs de sommets contenant ;
  - Un point géométrique dans  $\mathbb{R}^3$  ;
  - Une classe de quadriques permettant de mesurer et éventuellement de cumuler les erreurs géométriques ;
  - Un triplet de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$  représentant un repère local ;
  - Un triplet de fonctions représentant les fonctions de champs de lumière ;
2. Une classe d'erreur avec des méthodes qui renvoient pour chaque arête ;
  - L'erreur qui y est associée (en fonction du type de contraction que l'utilisateur aura choisi) ;
  - Une instance de classe d'attributs comprenant les attributs à associer au sommet contracté le cas échéant ;
3. Une classe d'algorithme se servant des classes précédentes afin d'ordonner les arêtes dans une pile et de les contracter une à une jusqu'au seuil spécifié par l'utilisateur.

Quelques contraintes esthétiques ont également été mis en place sur la simplification de nos maillages. Ainsi, une contraction sera interdite si elle réduit l'arité d'un sommet sous 4 (moins de 4 triangles qui le bordent). De plus, nous interdisons les contractions d'arêtes dont le sommet résultant aura plus de 11 triangles voisins car cela générerait des triangles allongés et fins et dégraderait la qualité du maillage.

Ces limites esthétiques ont été obtenues heuristiquement. Elles influent sur le seuil de simplification maximale d'un modèle mais n'influent cependant pas directement sur nos résultats relatifs à partir du moment où toutes les méthodes de simplification ont été testées sous les mêmes contraintes.

**Modélisation et visualisation** Tous les calculs ont été intégrés à la plate-forme de modélisation géométrique *CGoGN*<sup>1</sup>.

La visualisation des maillages tel qu'illustrée dans toutes les images de ce document se fait par le modèle de Gouraud. Ainsi, pour tout sommet visible, la couleur est calculée à partir de son champ de lumière et de la position relative de l'observateur, afin d'être interpolée sur le triangle.

Aucune source lumineuse virtuelle n'existe dans nos scènes visualisées afin que toute information visuelle soit issue de la numérisation des objets<sup>2</sup>.

## 5.2 Tests

### 5.2.1 Données de test et caractéristiques

Pour tester nos méthodes de simplification, nous disposons des données suivantes.

---

1. Combinatorial and Geometric modeling with Generic N-dimensional Maps – <https://iggservis.u-strasbg.fr/CGoGN/>

2. Ceci ne vaut pas pour les maillages purement géométrique montrés au chapitre 3 auxquels nous avons ajouté une couleur et une illumination artificielle.



FIGURE 5.1 – Statuette africaine avec champs de lumière : peu de motifs mais de grands reflets spéculaires – 184 281 faces

### Spécification des données

Les données dont nous disposons comprennent un maillage triangulaire avec les attributs suivants à chaque sommet.

1.  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  : un plongement géométrique ;
2.  $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, (x_j, y_j, z_j) \in \mathbb{R}^3$  et  $(x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$  : trois vecteurs du repère local, supposé direct et orthonormé ;
3.  $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6) \in \mathbb{R}^6, (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6) \in \mathbb{R}^6$  et  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \in \mathbb{R}^6$  : trois ensembles de 6 scalaires définissant les fonctions de champ de lumière pour les canaux de couleur  $(R, G, B)$  et tel que

$$\begin{aligned} R &= r_1 u^2 + r_2 v^2 + r_3 uv + r_4 u + r_5 v + r_6 \\ G &= g_1 u^2 + g_2 v^2 + g_3 uv + g_4 u + g_5 v + g_6 \\ B &= b_1 u^2 + b_2 v^2 + b_3 uv + b_4 u + b_5 v + b_6 \end{aligned}$$

où  $(u, v)$  est la projection orthogonale sur le plan tangent au sommet, du point de vue sur l'hémisphère visible.  $(u, v)$  est un point du disque unité (voir section 1).

### Maillages considérés et caractéristiques

Nous avons deux maillages avec champs de lumière à notre disposition.

**Statuette africaine** La statuette africaine est un modèle qui varie peu en couleurs et n'a quasiment pas de motifs. Cependant, ce modèle contient plusieurs effets spéculaires très visibles et qui varient fortement selon le point de vue (voir figure 5.1).

Il nous sera donc utile pour évaluer le maintien des effets spéculaires et de la forme globale.

Les « bras » de la statuette sont relativement fins tandis que le ventre est beaucoup plus large, l'erreur géométrique est donc relativement hétérogène sur le maillage entier.



FIGURE 5.2 – Vase grec avec champ de lumière : peu de reflets, quelques motifs – 362 512 faces

**Vase grec** Le modèle du vase grec est de nature très différente du modèle précédent. Il n’y a que peu de spécificités liés aux reflets spéculaires mais quelques effets de brillance sont présents. Par contre, plusieurs motifs bien distincts sont discernables : le personnage, la grappe de raisins, la forme brillante sur le col, les motifs sur l’anse, etc.

Ce modèle nous sera donc plutôt utile dans l’optique d’évaluer le maintien des motifs.

Ces maillages ont été normalisés avant d’effectuer les tests. Ainsi, la longueur moyenne des arêtes vaut l’unité.

### 5.2.2 Méthodes de simplifications à analyser

Au chapitre 4, nous avons défini une mesure d’erreur pour chacun de nos attributs :

- QEM pour la géométrie (equation (2.5)) ;
- Intégrale surfacique sur l’écart quadratique des fonctions sur les points de vue communs (equation (4.1)) ;
- Intégrale surfacique d’erreur quadratique maximale sur les points de vue perdus (equation (4.2)).

La mesure d’erreur totale est la somme (éventuellement pondérée) de ces erreurs quadratiques.

Nous avons également défini les possibilités de contraction suivantes :

- Géométrie : semi-contraction ou placement optimal ;
- Repère local : semi-contraction ou interpolation sphérique des normales au sommet en fonction de la géométrie (equation (4.8)) ;
- Fonction de champ de lumière : semi-contraction ou fonction générant l’erreur minimale par rapport aux deux fonctions des sommets précédents (equation (4.7)).

L’erreur sur la géométrie peut être définie par rapport au maillage initial (cumul des quadriques) ou au maillage courant (variante « memoryless »). Les erreurs sur les champs de lumière ne peuvent être définis que par rapport au maillage courant.

### Métriques hybrides

Bien évidemment, certaines combinaisons de contractions ont plus de sens que d’autres.

Ainsi, on retiendra dans un premier temps les deux combinaisons les plus naturelles :

- Tout en semi-contraction : le sommet contracté aura toutes les propriétés d’un des sommets de l’arête considérée, à savoir celui qui génère la plus petite erreur.
- Tout en optimal : placement géométrique optimal, interpolation sphérique des normales et fonction de champ de lumière qui minimise l’erreur aux deux champs de lumière de l’arête considérée.

Concernant les autres combinaisons, on peut se poser la question de savoir s’il est pertinent de faire de la semi-contraction pour un attribut et de la contraction optimale pour un autre.

Nous souhaitons cependant pouvoir utiliser le potentiel du placement optimal de la QEM, tout en se limitant à de la semi-contraction sur les champs de lumière pour les raisons que nous avons déjà évoquées à la page 34. Même s’il n’y a que peu de fondement mathématique derrière, nous testerons cette méthode hybride.

Faire de la semi-contraction sur la géométrie et de l’interpolation sur les champs de lumière n’a aucun intérêt d’après nous car nous savons que le plongement optimal en géométrie se comporte mieux, alors que nous craignons justement d’utiliser l’interpolation sur les champs de lumière.

Finalement, nous allons donc tester les politiques de contraction suivantes :

1. Semi-contraction complète
2. Méthode hybride : contraction optimale pour la géométrie et semi-contraction sur les champs de lumière
3. Contraction optimale complète

## Cumul des erreurs

Nous avons vu que l’erreur géométrique est la seule composante de notre métrique permettant de mesurer une erreur au maillage original.

Nous ne voyons cependant pas pourquoi nous l’appliquerions ainsi plutôt qu’en version « memoryless ». Il apparaît très gênant de modifier le rapport de force<sup>3</sup> entre nos entités au cours de la simplification, en particulier pour des tests fondamentaux comme ceux que nous souhaitons faire. Si la mesure d’écart au maillage original s’avère efficace, il sera possible de l’appliquer plus tard, mais elle n’est pas pertinent à utiliser dans nos tests qui, rappelons-le, visent à mesurer la qualité de notre mesure d’erreur sur les champs de lumière de façon fondamentale.

Ainsi, toutes nos expérimentations se feront avec une QEM non cumulative.

## 5.3 Résultats

### 5.3.1 Critères de qualité d’un maillage simplifié

Avant d’évaluer les maillages simplifiés, établissons les critères de qualité visuels.

1. *L’aspect global à distance*

Ce critère est primordial. Le modèle simplifié devra être globalement conforme au modèle initial tant en géométrie qu’en aspect de couleur. Si ce n’est pas le cas, la simplification sera considérée comme mauvaise.

2. *La préservation des reflets spéculaires*

Les effets de réflexion forment la raison même de l’utilisation des champs de lumière. C’est pourquoi nous jugeons que le modèle simplifié devra préserver cette information au mieux.

---

3. voir explications à ce sujet à la section page 3.2.3.



FIGURE 5.3 – Vase grec simplifié à 72 502 faces (réduction à 20%) avec la méthode hybride.

### 3. *Le bon maintien des motifs visuels*

C'est le dernier critère que l'on juge important.

Comme critère secondaire, on peut identifier la qualité du maillage géométrique (forme des triangles notamment).

## 5.3.2 Comparaison qualitative des techniques de contraction

Nous allons comparer les modèles résultants des diverses simplifications de nos maillages<sup>4</sup>.

Nous avons déjà évoqué au chapitre 1 que l'on souhaite tester fondamentalement les métriques en vue d'une simplification grossière d'un modèle (passage d'un modèle fin vers un modèle grossier plus simple).

Nous souhaitons ainsi évaluer des simplifications à forts taux. Il ne s'agit pas d'aller chercher la limite de simplification « raisonnable », donc des taux de simplification extrêmes.

L'ordre de grandeur des taux de simplification que nous avons choisis (réductions à 20%, 15% et 10% du maillage) permet d'une part d'évaluer une simplification grossière et correspond d'autre part à des niveaux (heuristiques) qui permettent de départager les différentes méthodes.

### Médiocrité de la technique hybride

Dans un premier temps, on remarque l'apparition d'artefacts sur les maillages simplifiés par la méthode hybride. Les figures 5.3 et 5.4b montrent ces artefacts créés, en particulier dans les grandes zones plutôt uniformes.

Cet effet paraît logique car nous faisons de la contraction optimale sur la géométrie (le sommet est donc placé à une nouvelle position) alors que l'on reprend un des deux champs de lumière. Ainsi, un champ de lumière, et donc certaines couleurs, est littéralement déplacée vers de nouvelles positions. Cela a pour effet de créer des cassures peu naturelles dans les couleurs.

---

4. Dans ce chapitre, nous illustrons nos propos par une sélection réduite d'images. Il y en a davantage dans l'annexe B.

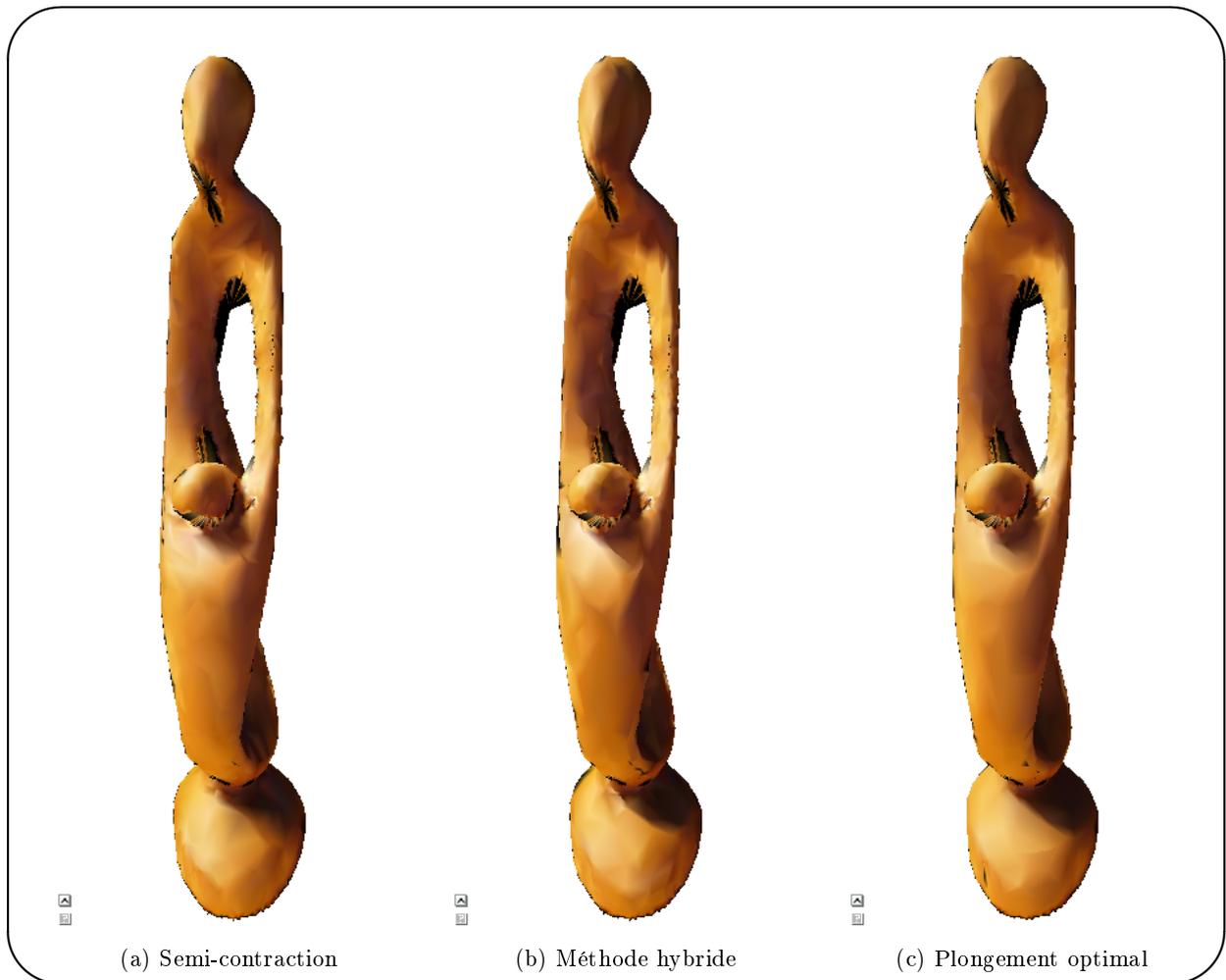


FIGURE 5.4 – Comparaison des simplifications de la statuette africaine avec champs de lumière à 18 519 faces.

Cet effet indésirable est généralisé sur tous nos tests et rend donc la simplification par la méthode hybride inappropriée.

### Comparaison semi-contraction et contraction optimale

Les deux autres techniques génèrent des résultats de qualité équivalente. Ils arrivent tous les deux à préserver correctement l’aspect global de l’objet modélisé. Analysons-en les différences.

**Reflets spéculaires** La figure 5.4 caractérise bien l’effet que nous avons observé sur toutes nos simplifications (voir annexe B) : la technique par semi-contraction maintient mieux le reflet spéculaire. L’interpolation de fonctions de champ de lumière a, comme nous le craignons, eu l’effet d’atténuer les reflets.

**Aspect global et motifs** L’aspect global est maintenu de façon similaire par les deux techniques. De légères différences subsistent cependant.

La technique par contraction optimale a le même effet que sur les couleurs (voir page 21) : un floutage des motifs et une atténuation des seuils de couleur. Sur un maillage tel que la statuette

africaine, cela n'est pas dérangeant. En effet, aucun motif ne pouvant être détruit, cela génère un modèle d'aspect plus lisse, tout en étant conforme à l'original.

De plus, cet effet de floutage n'est pas significatif sur les motifs du vase (voir figure 5.5) et n'est en tout cas pas gênant lors d'une observation à distance. Nous verrons dans la section 6.2 que la préservation du motif a été avantagé par un biais dans le maillage.

### Conclusions partielles

Au vu des commentaires que nous avons pu faire ci-dessus, nous classons les trois variantes comme suit.

1. Semi-contraction ;
2. Contraction optimale ;
3. Méthode hybride.

où les deux premières sont plutôt équivalentes globalement, la semi-contraction préservant mieux les reflets spéculaires.

La méthode hybride génère des artefacts visuels gênants et jugés inacceptables pour une simplification.

La semi-contraction et la contraction optimale préservent bien l'aspect global. La technique par semi-contraction génère cependant un maillage moins régulier alors que la contraction optimale floute les couleurs en général. Comme pour les simplifications avec couleur, ce floutage n'est pas dérangeant lorsque l'on observe l'aspect global du modèle, donc à distance. Au contraire, il permet d'éviter la création de seuils de couleur indésirables.

L'inconvénient majeur de la technique par contraction optimale est que le floutage des couleurs génère une atténuation des reflets spéculaires, ce qui, rappelons-le, est une caractéristique primordiale des modèles avec champs de lumière.

Nous verrons cependant dans la section « limites » du chapitre 6 que ces conclusions donnent une bonne indication concernant le rapport contraction optimale - semi-contraction, mais que quelques réserves sont à émettre concernant nos résultats.

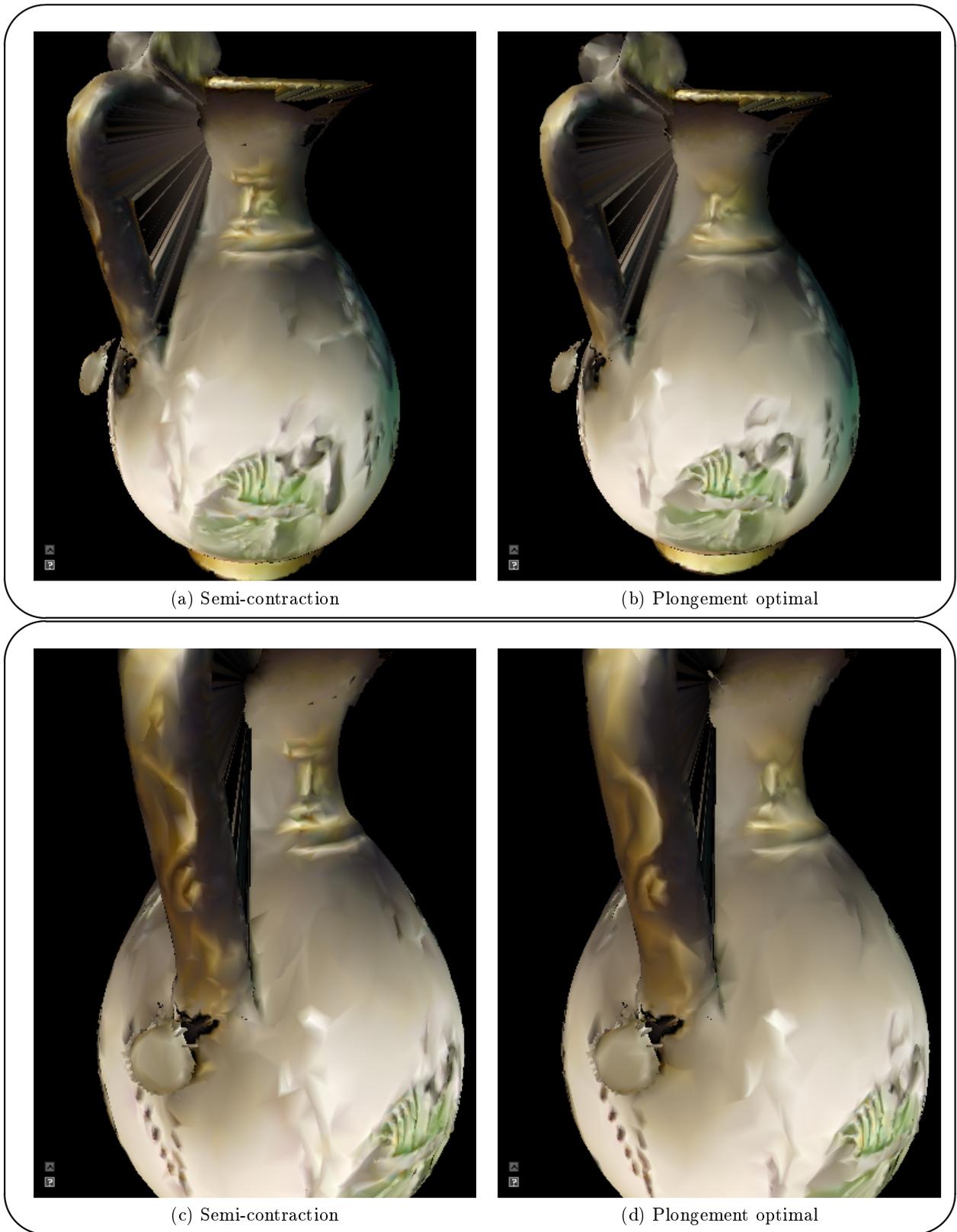


FIGURE 5.5 – Comparaison des simplifications du vase grec avec champs de lumière à 36 430 faces.

## Contenu

- 6.1 Contributions**
- 6.2 Évaluation des expérimentations et limites**
- 6.3 Perspectives**

# Chapitre

# 6

## Conclusion

Ce chapitre conclut le présent rapport. Il résume les contributions qui y ont été présentées et en établit une évaluation, notamment en exhibant leurs qualités et leurs limites. Finalement, une ouverture est proposée sur de possibles suites à donner à nos travaux.

## 6.1 Contributions

À ce jour, aucune méthode de simplification de maillages avec champs de lumière n'a été publiée.

Après avoir fait un tour d'horizon des principales méthodes de simplification de maillages surfaciques sans attributs et avec attributs de couleur, nous avons établi plusieurs contributions.

Tout d'abord, nous avons proposé un comparatif des différentes techniques recensées et de quelques variantes de celles-ci. Ainsi, nous avons pu extraire des notions importantes, notamment concernant la nature des métriques d'erreur (semi-contraction ou contraction optimale, mesure d'erreur par rapport au maillage original ou par rapport au maillage courant), et concernant l'interpolation de couleurs.

Suite à cela, nous avons proposé une métrique d'évaluation d'erreur commise à la contraction d'une arête, applicable aux maillages avec champs de lumière, indépendamment de la base dans laquelle une fonction de champ de lumière est exprimée. De plus, la métrique que nous proposons est quadratique sur les scalaires de fonctions de champ de lumière associé à un sommet contracté. Ainsi, il est possible de trouver une telle fonction de façon à ce qu'elle minimise l'erreur produite lors de la contraction.

Finalement, après avoir défini les critères de qualité d'un modèle avec champs de lumière simplifié, nous avons évalué différentes variantes de simplification sur deux modèles. Nous avons ainsi pu extraire des caractéristiques précises des variantes testées et établir des premières conclusions à leur sujet.

Dans la section suivante, nous allons présenter les limites de nos expérimentations, notamment en caractérisant les tests qu'il faudra faire pour conclure définitivement.

## 6.2 Évaluation des expérimentations et limites

Dans nos expérimentations, nous avons pu tester différentes variantes utilisant notre métrique sur les champs de lumière. Elles nous permettent de répondre aux questions que nous nous posons concernant la validité d'une métrique hybride ou encore sur les risques liés à l'interpolation de fonctions de champs de lumière.

Cependant, nous aurions souhaité évaluer la valeur ajoutée de la métrique sur les champs de lumière en comparant une simplification naïve (mesure d'erreur géométrique uniquement) avec une simplification comprenant notre critère sur les champs de lumière. Malheureusement, lors des tests nous nous sommes rendus compte que les maillages que nous avons à disposition ne permettent pas de conclure à ce sujet à cause d'un biais qui a été introduit lors de la numérisation de l'objet. Les couleurs de l'objet ont visiblement influencé les scans géométriques en rapprochant ou éloignant légèrement les sommets en fonction de la couleur. Ainsi, les motifs sont en relief par rapport aux autres zones des maillages (voir figure 6.1), ce qui génère une erreur géométrique en créant un gradient élevé sur la géométrie là où il y en a déjà un sur la couleur.

Ceci a pour effet de maintenir plus ou moins correctement les motifs avec le seul critère d'erreur sur la géométrie.

Pour pouvoir conclure sur la valeur ajoutée de notre métrique, et pour valider totalement nos expérimentations, nous aurions besoin d'autres maillages, notamment :

- Des maillages synthétiques dont la géométrie est très régulière (un cylindre par exemple) et où les champs de lumière varient : afin de montrer que notre métrique d'erreur sur les champs de lumière est bien déterminante.

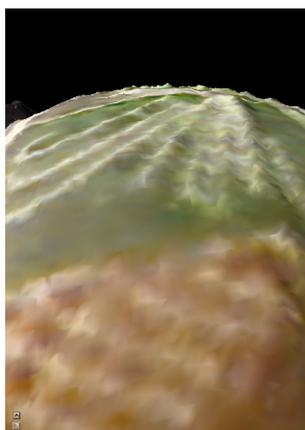


FIGURE 6.1 – Cette image, prise à ras de surface du vase nous montre à quel point la numérisation de la surface a été biaisée par la couleur.

- Des maillages synthétiques dont les champs de lumière sont réguliers et dont la géométrie varie fortement.

Ces maillages nous permettront de mettre en avant le travail spécifique de la métrique de champs de lumière.

### 6.3 Perspectives

Nos travaux nous permettent de suggérer plusieurs suites à donner ainsi que quelques études à réaliser en marge.

#### Finalisation

Nous avons déjà évoqué le fait que nos tests donnent un bon aperçu du comportement de nos méthodes mais qu'ils sont sous réserve de confirmation avec des tests sur de nouveaux maillages dont nous ne disposons pas actuellement. Nous avons également caractérisé nos besoins en maillages à ce sujet.

De plus, en vue d'une publication future, des mesures quantitatives pourront être mises en place :

- Mesures d'écart géométrique entre un maillage original et un maillage simplifié (par mesure RMS par exemple) ;
- Mesures d'écart numérique sur les couleurs pour un point de vue donné.

Ces deux techniques permettent de mesurer un écart numérique sur la géométrie et la couleur afin d'appuyer nos impressions visuelles.

- Mesures de qualité topologique, notamment des angles des triangles. Nous avons vu que la semi-contraction génère des triangles peu homogènes : certains sont très allongés notamment. Ainsi, nous pourrions ajouter un critère sur ces angles afin de guider la simplification.

#### Extension

Nous savons que la distance euclidienne dans le système RGB ne correspond pas à l'écart visuel perçu. Ainsi, il serait intéressant d'analyser le comportement de notre métrique dans un espace de couleurs qui s'y prête davantage : *Cie-LAB* ou *XYZ* notamment.

Notre métrique peut également servir à des applications plus poussées qui ne formaient pas l'objet de nos recherches. On peut notamment penser à faire des maillages progressifs permettant de naviguer (faire des allers-retours) dans les différents niveaux de simplification ou encore des maillages adaptatifs multiresolution qui affichent un maillage grossier aux endroits à une distance donnée et plus fins aux endroits à grande importance visuelle.

## Généralisation

Les principes extraits de notre analyse bibliographique et nos travaux sur les champs de lumière pourront servir de base pour une étude portant sur la simplification de *champs de réflectance*. Il s'agit de modèles tels que les champs de lumière mais dont la position de l'illumination est également variable.

Cela augmente la dimension du problème et mérite ainsi une étude à plus long terme. L'intérêt de tels modèles est déjà établi : décors virtuels de films à partir de lieux numérisés, prototypage pour jeux vidéo, etc.

## Travaux annexes

Lors de nos travaux, nous nous sommes posés certaines questions que nous n'avons pas pu étudier à ce jour et qui seraient pourtant intéressantes pour les champs de lumière.

**Étude de [KCL08]** Nous avons déjà évoqué notre étonnement concernant l'article [KCL08]. Les différentes entités choisies dans leur métrique nous paraissent intéressantes mais mal justifiées.

Ainsi, il y a une mesure de distance aux voisins qui détermine *l'importance visuelle d'un sommet*. Nous nous demandons si cela ne met pas trop l'accent sur les sommets isolés (il n'y a pas forcément un intérêt à protéger un sommet rouge au milieu d'un océan de sommets bleus vu que toutes les spécificités d'un motif auront déjà été perdues).

La seconde mesure sur les couleurs est *l'erreur de contraction*. Nous supposons une erreur de frappe dans l'article. Une justification plus formelle de cette mesure nous permettrait de l'affirmer.

Seulement lorsque ces éléments seront éclaircis, il sera possible d'étudier l'utilisabilité des principes de ces mesures sur les champs de lumière : distance d'un sommet à ses voisins, mesurer l'erreur commise par une contraction, etc.

**QEM cumulative normalisée** Finalement, il serait intéressant, que ce soit sur les maillages géométriques simples, sur les maillages avec couleur ou avec attributs complexes, d'étudier une version cumulative de la QEM normalisée par rapport au nombre de simplifications qui ont eu lieu. Cela pourrait être fait en comptant le nombre de plans cumulés par la QEM ou encore le nombre de sommets qui en sont l'ancêtre.

Ceci permettra de faire une simplification avec une erreur par rapport au maillage original sans pour autant modifier le rapport de force entre la QEM et toute autre entité d'une métrique d'erreur.

# Bibliographie

- [COM98] Jonathan Cohen, Marc Olano, and Dinesh Manocha. Appearance-preserving simplification. In *SIGGRAPH '98 : Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 115–122, New York, NY, USA, 1998. ACM.
- [GCC07] Carlos González, Pascual Castelló, and Miguel Chover. A texture-based metric extension for simplification methods. In *GRAPP (GM/R)*, pages 69–76, 2007.
- [GH97] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. In *SIGGRAPH '97 : Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 209–216, New York, NY, USA, 1997. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- [GH98] Michael Garland and Paul S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. In *VIS '98 : Proceedings of the conference on Visualization '98*, pages 263–269, Los Alamitos, CA, USA, 1998. IEEE Computer Society Press.
- [HG97] Paul S. Heckbert and Michael Garland. Survey of polygonal surface simplification algorithms, 1997.
- [HMM00] Hugues Hoppe, Steve Marschner, and Steve Marschner. Efficient minimization of new quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes, 2000.
- [Hop96] Hugues Hoppe. Progressive meshes. In *SIGGRAPH '96 : Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 99–108, New York, NY, USA, 1996. ACM.
- [Hop97] Hugues Hoppe. View-dependent refinement of progressive meshes, 1997.
- [Hop99] Hugues Hoppe. New quadric metric for simplifying meshes with appearance attributes. In *VISUALIZATION '99 : Proceedings of the 10th IEEE Visualization 1999 Conference (VIS '99)*, Washington, DC, USA, 1999. IEEE Computer Society.
- [KCL08] Hyun Soo Kim, Han Kyun Choi, and Kwan H. Lee. Mesh simplification with vertex color. In *GMP*, pages 258–271, 2008.

- [LB04] Dan Lelescu and Frank Bossen. Representation and coding of light field data. *Graph. Models*, 66(4) :203–225, 2004.
- [SSGH01] Pedro V. Sander, John Snyder, Steven J. Gortler, and Hugues Hoppe. Texture mapping progressive meshes. In *SIGGRAPH '01 : Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 409–416, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [WLL<sup>+</sup>09] Tim Weyrich, Jason Lawrence, Hendrik P.A. Lensch, Szymon Rusinkiewicz, and Todd Zickler. Principles of appearance acquisition and representation. *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, 4(2) :75–191, October 2009.

# Annexes

**A****Changements de repères**

Ce chapitre comprend les calculs permettant de comparer deux champs de lumière définis sur des hémisphères orientés différemment. Nous avons souhaité les extraire du noyau du rapport afin de ne pas en perturber la lecture. Ils représentent cependant une partie non négligeable du travail.

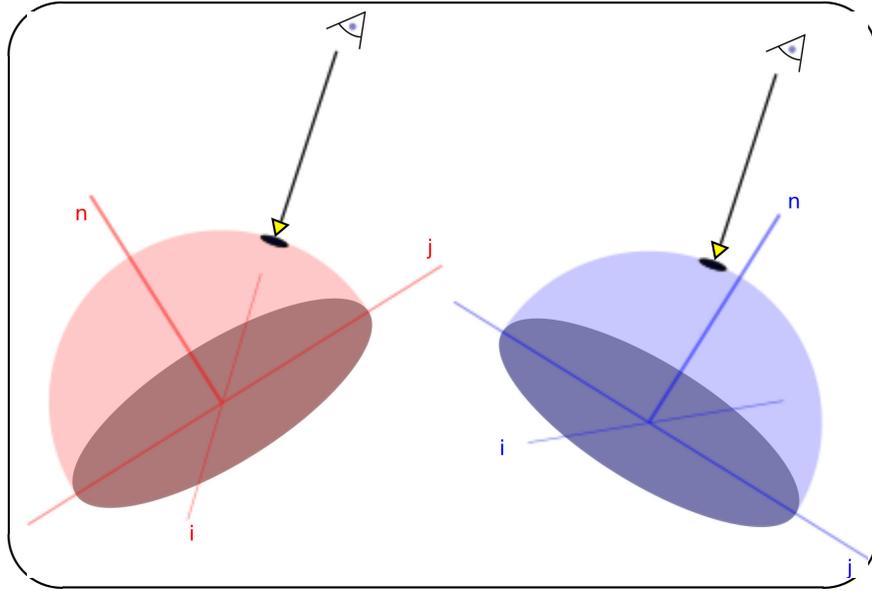


FIGURE A.1 – Pour un point de vue identique, la coordonnée du point sur l'hémisphère est différente lorsque les hémisphères sont orientés différemment

## A.1 Comparaison de deux fonctions de champ de lumière

Nous souhaitons pouvoir comparer deux fonctions de champ de lumière sur les points de vue qu'ils ont en commun, ce qui est compliqué à faire.

En effet, les fonctions ne sont pas comparables en tant que tels vu que leurs paramètres parcourent un domaine de définition local. Ainsi, une position d'observation donnée de l'hémisphère se transcrit en coordonnées  $(u_1, v_1)$  dans un repère et dans d'autres coordonnées  $(u_2, v_2)$  dans l'autre (voir figure A.1).

### A.1.1 Recalage des repères

Afin de rendre ces données comparables, certaines transformations s'imposent.

Soient  $Lff_1$  et  $Lff_2$  deux fonctions de champs de lumière décrits dans leurs repères respectifs  $F_1$  et  $F_2$  :

$$\begin{aligned}
 Lff_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow E \\
 (u, v)_{F_1} &\mapsto e \\
 \text{avec } F_1 &= (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{n}_1) \\
 Lff_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow E \\
 (u, v)_{F_2} &\mapsto e \\
 \text{avec } F_2 &= (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{n}_2)
 \end{aligned}$$

Voyons comment décrire ces fonctions dans un même repère afin de comparer les points de vue en commun. Pour cela, deux rotations s'imposent :

#### 1. Rotation $T_1(\gamma)$

Cette rotation s'appuie sur la propriété suivante :

**Propriété 1** *Les deux plans équatoriaux des hémisphères, définis par les normales  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  respectivement, ont pour intersection une droite  $d$ . Cette droite est alors comprise dans les plans  $(\mathbf{i}_{F_1}, \mathbf{j}_{F_1})$  et  $(\mathbf{i}_{F_2}, \mathbf{j}_{F_2})$ .*

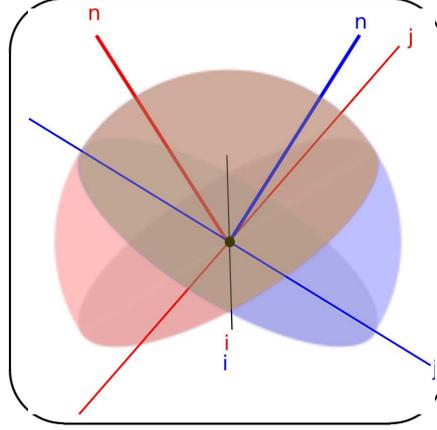


FIGURE A.2 – État après les rotations  $T_1$ . Par simples rotations dans les plans équatoriaux respectifs, les nouveaux vecteurs  $\mathbf{j}_{F'_1}$ ,  $\mathbf{n}_{F'_1}$ ,  $\mathbf{j}_{F'_2}$  et  $\mathbf{n}_{F'_2}$  deviennent tous coplanaires.

Remarque :  $\mathbf{n}_{F'_1} = \mathbf{n}_{F_1}$  et  $\mathbf{n}_{F'_2} = \mathbf{n}_{F_2}$ .

Ainsi, il suffit d'opérer une rotation  $T_1$  d'angle orienté  $\widehat{\mathbf{i}_1 \rightarrow \mathbf{d}}$  (respectivement  $\widehat{\mathbf{i}_1 \rightarrow \mathbf{d}}$ ) sur le repère  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ) autour de sa normale  $\mathbf{n}_1$  (respectivement  $\mathbf{n}_2$ ) pour aligner son vecteur  $\mathbf{i}_1$  (respectivement  $\mathbf{i}_1$ ) sur la droite  $d$ . Nous verrons plus loin comment écrire la fonction  $Lff_1$  (respectivement  $Lff_2$ ) à base de cette rotation pour qu'elle soit décrite dans le repère ainsi obtenu.

Remarquons que cette rotation ne modifie pas l'hémisphère défini sur le repère mais uniquement sa paramétrisation.

Soient les nouveaux repères obtenus par ces rotations :  $F'_1 = (\mathbf{i}_{F'_1}, \mathbf{j}_{F'_1}, \mathbf{n}_{F'_1} = \mathbf{n}_{F_1})$  et  $F'_2 = (\mathbf{i}_{F'_2}, \mathbf{j}_{F'_2}, \mathbf{n}_{F'_2} = \mathbf{n}_{F_2})$  où  $\mathbf{i}_{F'_1} = \mathbf{i}_{F'_2}$ .

La situation est la désormais la suivante (voir figure A.2) : les vecteurs  $\mathbf{j}_{F'_1}$ ,  $\mathbf{n}_{F'_1}$ ,  $\mathbf{j}_{F'_2}$  et  $\mathbf{n}_{F'_2}$  sont coplanaires.

2. Les deux repères locaux ne sont plus que séparés d'une rotation d'angle  $\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}$  autour de l'axe  $\mathbf{i}_{F'_1} = \mathbf{i}_{F'_2}$ . Une rotation  $T_2(\alpha)$  d'un des repères,  $F_2$  par exemple, (tel que  $F''_2 = T_2(F'_2) = F'_1$ ) nous permet de les recaler complètement.

**Transformation par  $T_1$  et  $T_2$**  Nous allons désormais décrire la transformation d'une fonction de champ de lumière à base des rotations  $T_1$  et  $T_2$  sur les repères. Soit le champ de lumière  $L$  défini par son repère local  $F = (\mathbf{i}_F, \mathbf{j}_F, \mathbf{n}_F)$  et sa fonction  $Lff_F : \mathbb{R}_F^2 \xrightarrow{Lff_F} E$ . Appliquons les deux transformations vues ci-dessus.

### 1. Rotation $T_1$ autour de la normale

Il s'agit d'une rotation autour de  $\mathbf{n}$  d'un angle orienté  $\gamma$ , l'angle orienté de  $\mathbf{i}$  vers  $\mathbf{i}'$ .

Nous avons (voir chapitre 1) :

$$\begin{aligned} Lff : \mathbb{R}^2 &\rightarrow E \text{ définie dans le repère } (\mathbf{i}_F, \mathbf{j}_F). \\ (u, v)_F &\mapsto e \end{aligned}$$

et nous souhaitons écrire

$$\begin{aligned} Lff' : \mathbb{R}^2 &\rightarrow E \text{ définie dans le repère } (\mathbf{i}'_F, \mathbf{j}'_F). \\ (u, v)_{F'} &\mapsto e \end{aligned}$$

Introduisons  $T_1(\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{i}') = T_{F \rightarrow F'}$ , la rotation autour de  $\mathbf{n}$  recalant le vecteur  $\mathbf{i}$  sur le vecteur  $\mathbf{i}'$ , et ainsi recalant  $F$  sur  $F'$ .

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_1} \mathbb{R}^2 \text{ définie sur le repère } (\mathbf{i}_F, \mathbf{j}_F) \text{ et renvoyant vers le repère } (\mathbf{i}'_F, \mathbf{j}'_F). \\ (u, v)_F \mapsto (u, v)_{F'}$$

En composant ces éléments, on obtient :

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_1^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{Lff} E \\ (u, v)_{F'} \mapsto (u, v)_F \mapsto e$$

Et ainsi on a  $Lff' = Lff \circ T_1^{-1}$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Lff \circ T_1^{-1}} E \\ (u, v)_{F'} \mapsto e$$

$T_1(\gamma)$  est définie par la matrice  $R_1(\gamma)$  de rotation planaire d'angle  $\gamma$ .

$$R_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

Ainsi, on peut définir  $Lff' = Lff \circ R_1^{-1}$ . S'agissant d'une rotation dans son plan de définition, il suffit d'opérer une rotation sur les variables de la fonction tel que :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{F'} = R_1^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_F$$

Ainsi, il suffit de substituer  $(u, v)$  par  $(u', v')$  dans l'expression de  $Lff$  afin d'appliquer  $R_1^{-1} \circ Lff$ . On a donc :

$$\begin{aligned} Lff(u, v)_F &= R_1^{-1} \circ Lff(u, v)_F \\ &= Lff(u, v)_{F'} \\ &= Lff(\cos(\gamma)u + \sin(\gamma)v, -\sin(\gamma)u + \cos(\gamma)v) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Ceci nous permettra d'écrire  $Lff(u, v)_{F'}$ , la fonction  $Lff$  tel que son domaine de définition est décrit dans le repère  $F'$ .

## 2. Rotation $T_2$ de recalage des normales

La seconde transformation  $T_2$  est une rotation autour de l'axe  $\mathbf{i}_{F'}$  d'angle orienté  $\alpha$  (angle de  $\mathbf{n}_2$  vers  $\mathbf{n}_1$ ). Le repère résultant s'appellera  $F''$ .

Pour la suite, nous allons passer en coordonnées sphériques qui nous faciliteront les calculs. Soient les coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  tel que  $P(\rho, \theta, \phi)$  soit défini par :

- $\rho$  : la distance de  $P$  à l'origine
- $\theta$  : l'angle entre  $\mathbf{j}_{F'}$  et  $\mathbf{OP}'$  (où  $P'$  est la projection orthographique du point  $P$  sur le plan  $(O, \mathbf{j}_{F'}, \mathbf{n}_{F'})$ )
- $\phi$  : l'angle entre  $\mathbf{i}_{F'}$  et  $\mathbf{OP}$ .

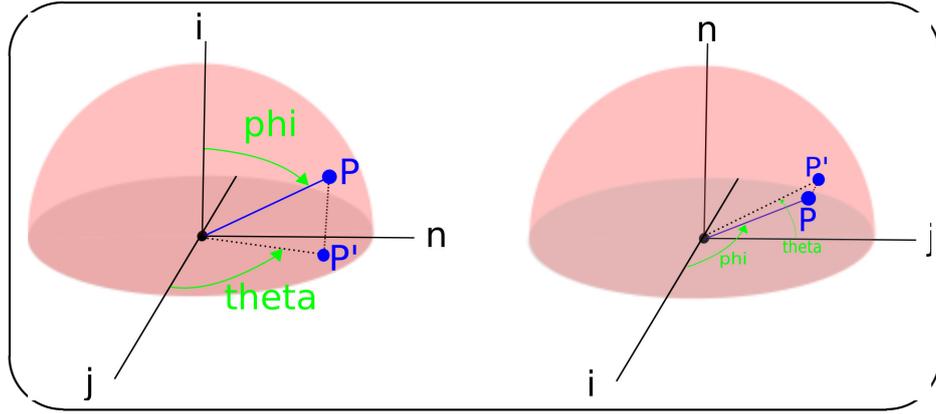


FIGURE A.3 – Nous définissons les coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  sur le repère  $(\mathbf{j}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ , c'est-à-dire tel que le pôle nord soit indiquée par l'axe  $\mathbf{i}$ .

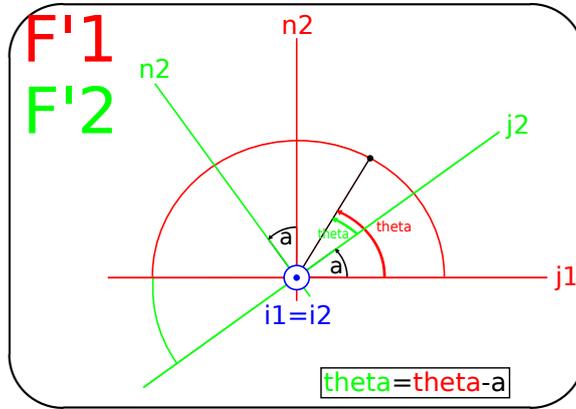


FIGURE A.4 – Coupe pour  $\phi = \frac{\pi}{2}$  tel que l'axe  $\mathbf{i}$  soit perpendiculaire au plan affiché. La rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathbf{i}$  fait varier la coordonnée  $\theta$  uniquement et tel que  $\theta_{F_2''} = \theta_{F_1'} = \theta_{F_2'} - \alpha$

Le tout est illustré dans la figure A.3.

Dans l'écriture sphérique également, nous pouvons réduire la description de l'hémisphère à deux coordonnées seulement. En effet, tout point sur l'hémisphère est à une distance unité de l'origine :  $\rho = 1$ .

La correspondance avec les coordonnées cartésiennes est établie par (voir figure A.3) :

$$(x_p, y_p, z_p) = (\rho \cos(\phi_p), \rho \cos(\theta_p) \sin(\phi_p), \rho \sin(\theta_p) \sin(\phi_p)) \quad (\text{A.2})$$

En particulier, lorsque l'on se restreint aux deux coordonnées suffisantes pour notre description de l'hémisphère, on a :

$$(u_p, v_p) = (\cos(\phi_p), \cos(\theta_p) \sin(\phi_p))$$

Soit un point  $h$  de l'hémisphère dont les coordonnées sphériques dans le repère  $F'$  sont  $(1, \theta_h, \phi_h)_{F'}$ . À partir de ces données et de l'angle  $\alpha$ , nous pouvons connaître les coordonnées  $(\rho, \theta_h, \phi_h)_{F''}$  de ce point dans le repère  $F''$  (voir figure A.4) par :

$$(\rho, \theta_h, \phi_h)_{F''} = (1, \theta_h - \alpha, \phi_h)_{F'}$$

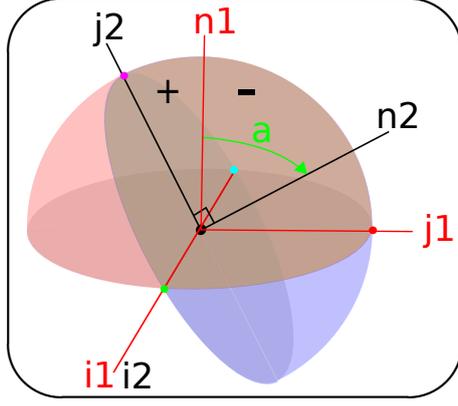


FIGURE A.5 – Description de l’intersection des hémisphères. Nous nous basons sur les coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  décrites dans le repère  $(\mathbf{j}_{F'_1}, \mathbf{n}_{F'_1}, \mathbf{i}_{F'_1})$ . Les coordonnées doivent décrire le domaine d’intégration qui équivaut à l’intersection des hémisphères :

$\rho$  parcourt la surface de rayon unité :  $\rho = 1$

$\theta$  doit couvrir l’hémisphère du point rouge au point rose :  $\theta \in [\max(0, \alpha), \pi - \min(0, \alpha)]$

$\phi$  doit couvrir l’hémisphère du point vert au point bleu :  $\phi \in [0, \pi]$

Cette écriture de la rotation permet de définir  $Lff$  avec comme domaine le repère  $F''$  :

$$\begin{aligned}
 Lff &\equiv Lff(u, v)_{F''} \\
 &= Lff(\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi))_{F''} \\
 &= Lff(\cos(\phi), \cos(\theta - \alpha)\sin(\phi))_{F'}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

## A.2 Domaine d’intégration après recalage

En supposant que l’on ait appliqué les transformations décrites dans la section A.1 rendant les fonctions comparables, nous pouvons désormais définir le domaine commun dans leur nouveau repère. Soient  $Lff_{1_{F'_1}}$  et  $Lff_{2_{F'_2}} = Lff_{2_{F'_1}}$  les fonctions décrites dans un même repère  $F'_1$ .

Décrivons le domaine de recouvrement dans ce repère et en coordonnées sphériques tel que nous les avons définis précédemment. Nous devons ainsi déterminer les valeurs que peuvent décrire les variables  $\theta$  et  $\phi$  afin de parcourir le domaine commun. Ce domaine peut être défini pleinement grâce à  $\alpha$ , l’écart entre les normales.

La variable  $\phi$  peut varier de  $\phi_{min} = 0$  à  $\phi_{max} = \pi$  vu que la rotation  $T_2(\alpha)$  n’intervient pas sur cette variable. La variable  $\theta$  quant à elle, varie de  $\theta_{min} = \max(0, \alpha)$  à  $\theta_{max} = \pi - \min(0, \alpha)$ . La figure A.5 illustre le raisonnement qui nous a permis d’aboutir à ces conclusions.

L’écart sur ces deux fonctions pourra ainsi se mesurer sur le domaine suivant :

$$\begin{aligned}
 \theta &\in [\max(0, \alpha), \pi - \min(0, \alpha)] \\
 \phi &\in [0, \pi]
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Remarque importante : une portion de surface  $dh$  de l’hémisphère contient un facteur  $\sin(\phi)$  afin de prendre en compte le rétrécissement d’un élément de surface lorsqu’on s’éloigne de la coupe  $\phi = \frac{\pi}{2}$  :

$$dh = d\theta \sin(\phi) d\phi \tag{A.5}$$

### A.3 Comparaison de champs de lumière lors d'une contraction

Une contraction de sommets est définie par le passage de deux champs de lumière  $L_1$  et  $L_2$  à un nouveau  $\overline{L}$ . Ceux-ci ont chacun leur repère local dans lequel est décrit sa fonction de champ de lumière.

Sur les points de vue en commun, nous souhaitons (voir page 33) mesurer la somme des écarts de  $\overline{Lff}$  aux fonctions  $Lff_1$  et  $Lff_2$ . En vue de pouvoir définir  $\overline{Lff}$  qui minimise ces écarts en utilisant la méthode d'additivité des quadriques et d'annulation du gradient (page 34),  $\overline{Lff}$  doit être décrite dans le même repère pour les deux mesures  $d^2(\overline{Lff}, Lff_1)$  et  $d^2(\overline{Lff}, Lff_2)$ .

Or, la façon dont nous avons décrit deux champs de lumière dans un repère commun (section A.1) n'est pas généralisable à une description dans un même repère de 3 fonctions (ou plus) issues de différents repères. Notre méthode s'appuie en effet sur la propriété 1, propre à deux repères.

Cependant, nous avons contraint le nouveau repère  $\overline{F}$  à être orienté d'une certaine façon (voir page 34). En particulier, sa normale devra se situer dans le même plan que les normales des repères  $F_1$  et  $F_2$ . Cela implique que la plan tangent (le plan  $(O, \mathbf{i}_{\overline{F}}, \mathbf{j}_{\overline{F}})$ ) comprend la droite d'intersection des plans tangents des repères  $F_1$  et  $F_2$ .

Une fois que la normale du nouveau repère a été défini (voir section 4.2.1 à la page 34), nous avons la liberté de paramétrer le plan tangent tel que nous le souhaitons (elle ne changera pas l'hémisphère des points de vue). Nous allons donc contraindre le vecteur  $\mathbf{i}_{\overline{F}}$  du nouveau repère à être aligné sur le vecteur d'intersection des plans tangents des repères  $F_1$  et  $F_2$ . Le vecteur  $\mathbf{j}_{\overline{F}}$  est alors choisi tel que le repère soit direct et orthonormé.

$\overline{Lff}$  est alors décrit dans ce nouveau repère.

Ainsi, afin de comparer  $\overline{Lff}$  et  $Lff_1$  (respectivement  $\overline{Lff}$  et  $Lff_2$ ) dans le repère  $\overline{F}$ , il suffit d'opérer deux rotations sur  $Lff_1$  (respectivement  $Lff_2$ ) :

1. Rotation  $T_1$  autour de  $\mathbf{n}_1$  (respectivement  $\mathbf{n}_2$ ) qui recale le vecteur  $\mathbf{i}_1$  (respectivement  $\mathbf{i}_2$ ) du repère  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ) sur le vecteur  $\mathbf{i}_{\overline{F}}$  du repère  $\overline{F}$ .
2. Rotation  $T_2$  autour de  $\mathbf{i}_{\overline{F}} = \mathbf{i}'_1 = \mathbf{i}'_2$  qui recale le vecteur  $\mathbf{n}_1$  (respectivement  $\mathbf{n}_2$ ) du repère  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ) sur le vecteur  $\mathbf{n}_{\overline{F}}$  du repère  $\overline{F}$ .

Les domaines d'intégration respectifs sont alors définis par les angles d'écart entre les normales de  $F$  et  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ), conformément à l'équation (A.4).

## A.4 Mise en œuvre

Cette section décrit la procédure calculatoire permettant d'effectuer les calculs précédents. Elle pourra servir de guide à l'implémentation des rotations respectives.

### A.4.1 Données

Soit un sommet  $v_1$  et son champ de lumière  $L_1$  défini par son repère  $F_1$  et sa fonction  $Lff_{1F_1}$ . Soit  $v_2$  défini de façon analogue.

$$\begin{aligned} L_1 &= \{F_1, Lff_1\} \\ L_2 &= \{F_2, Lff_2\} \end{aligned}$$

Soit le repère orthogonal normalisé et direct  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ) tel que  $\mathbf{n}_{F_1}$  (respectivement  $\mathbf{n}_{F_2}$ ) soit l'axe polaire de l'hémisphère qu'il représente.

$$\begin{aligned} F_1 &= (\mathbf{i}_{F_1}, \mathbf{j}_{F_1}, \mathbf{n}_{F_1}) = ((x_{i_{F_1}}, y_{i_{F_1}}, z_{i_{F_1}}), (x_{j_{F_1}}, y_{j_{F_1}}, z_{j_{F_1}}), (x_{n_{F_1}}, y_{n_{F_1}}, z_{n_{F_1}})) \\ F_2 &= (\mathbf{i}_{F_2}, \mathbf{j}_{F_2}, \mathbf{n}_{F_2}) = ((x_{i_{F_2}}, y_{i_{F_2}}, z_{i_{F_2}}), (x_{j_{F_2}}, y_{j_{F_2}}, z_{j_{F_2}}), (x_{n_{F_2}}, y_{n_{F_2}}, z_{n_{F_2}})) \end{aligned}$$

Soit la fonction de champ de lumière  $Lff_{1F_1}$  (respectivement  $Lff_{2F_2}$ ) définie dans son repère  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ).

$$\begin{aligned} Lff_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow E : (u, v)_{F_1} &\mapsto (a_{1F_1})u^2 + (b_{1F_1})v^2 + (c_{1F_1})uv + (d_{1F_1})u + (e_{1F_1})v + f_{1F_1} \\ Lff_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow E : (u, v)_{F_2} &\mapsto (a_{2F_2})u^2 + (b_{2F_2})v^2 + (c_{2F_2})uv + (d_{2F_2})u + (e_{2F_2})v + f_{2F_2} \end{aligned}$$

Cette forme polynomiale des fonctions de champ de lumière est la représentation que nous utiliserons pour nos calculs. D'autres formes existent bien évidemment.

Nous utiliserons par la suite des formes matricielles. Ainsi, les fonctions de champs de lumière seront représentés ainsi :

$$Lff : \mathbb{R}^2 \rightarrow E : (u, v) \mapsto \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \\ u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$= \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Soit  $\mathbf{n}_{\bar{F}} = (x_{n_{\bar{F}}}, y_{n_{\bar{F}}}, z_{n_{\bar{F}}})$  la normale définie au nouveau sommet contracté. Celle-ci est défini d'après la méthode de simplification choisie (voir page 34).

### A.4.2 Erreur à la contraction de champs de lumière

On doit pouvoir mesurer les écarts  $d^2(\overline{Lff}, Lff_1)$  et  $d^2(\overline{Lff}, Lff_2)$ . Ainsi, nous devons d'abord appliquer les transformations énoncées dans la section A.3 afin de décrire ces écarts dans le repère  $\bar{F}$ .

Soit  $\mathbf{d}$  le vecteur directeur de la droite d'intersection des équateurs des hémisphères respectifs.

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2\|} \quad (\text{A.8})$$

Alors, le repère  $\overline{F}$  est défini par :

$$\overline{F} = (\mathbf{d}, \mathbf{j}_{\overline{F}}, \mathbf{n}_{\overline{F}}) \text{ où } \mathbf{j}_{\overline{F}} = \frac{\mathbf{n}_{\overline{F}} \wedge \mathbf{d}}{\|\mathbf{n}_{\overline{F}} \wedge \mathbf{d}\|}$$

### Rotation autour des normales respectives

Les nouveaux repères  $F'_1$  et  $F'_2$  sont définis ainsi :

$$\begin{aligned} F'_1 &= (\mathbf{i}_{F'_1}, \mathbf{j}_{F'_1}, \mathbf{n}_{F'_1}) = (\mathbf{d}, \mathbf{j}_{F'_1}, \mathbf{n}_{F_1}) \\ F'_2 &= (\mathbf{i}_{F'_2}, \mathbf{j}_{F'_2}, \mathbf{n}_{F'_2}) = (\mathbf{d}, \mathbf{j}_{F'_2}, \mathbf{n}_{F_2}) \end{aligned}$$

et tel qu'ils soient orthonormés et directs, donc :

$$\begin{aligned} j_{F'_1} &= \frac{\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{d}}{\|\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{d}\|} \\ j_{F'_2} &= \frac{\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{d}}{\|\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{d}\|} \end{aligned}$$

Afin d'exprimer  $Lff_1$  (respectivement  $Lff_2$ ) dans le repère  $F'_1$  (respectivement  $F'_2$ ), nous devons déterminer la mesure de l'angle orienté  $\gamma_{F_1 \rightarrow F'_1}$  de  $\mathbf{i}_{F_1}$  à  $\mathbf{d} = \mathbf{i}_{F'_1}$  (respectivement  $\gamma_{F_2 \rightarrow F'_2}$  de  $\mathbf{i}_{F_2}$  à  $\mathbf{d} = \mathbf{i}_{F'_2}$ ).

$$\begin{aligned} \gamma_{F_1 \rightarrow F'_1} &= \text{sign}(\langle j_{F_1}, i_{F'_1} \rangle) \cdot \arccos \langle i_{F_1}, i_{F'_1} \rangle \\ &= \text{sign}(\langle j_{F_1}, d \rangle) \cdot \arccos \langle i_{F_1}, d \rangle \\ \gamma_{F_2 \rightarrow F'_2} &= \text{sign}(\langle j_{F_2}, i_{F'_2} \rangle) \cdot \arccos \langle i_{F_2}, i_{F'_2} \rangle \\ &= \text{sign}(\langle j_{F_2}, d \rangle) \cdot \arccos \langle i_{F_2}, d \rangle \end{aligned}$$

**Justification** Nous cherchons à obtenir l'angle  $\widehat{i_F, d}$ . L'*arcCos* du produit scalaire nous renvoie un angle entre 0 et  $\pi$  radians, alors que nous souhaitons connaître l'angle absolu dans  $[0, 2\pi]$  et tel que l'angle soit orienté de  $i_{F_1}$  à  $d$ . Multiplier le résultat par le signe du produit scalaire de  $\widehat{j_F, i_{F'}}$  permet d'obtenir un tel angle (positif si dans le sens trigonométrique, négatif sinon).

Étant donné cet angle, nous pouvons décrire  $Lff_1$  et  $Lff_2$  dans leurs nouveaux repères grâce à la matrice de rotation  $R_1$  (1) et en appliquant  $Lff \circ R_1^{-1}(u, v)$  :

$$\begin{aligned} Lff \circ R_1^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow E : (u, v) \mapsto \\ \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a.\cos^2(\gamma) + b.\sin^2(\gamma) - c.\sin(\gamma).\cos(\gamma) & (a-b).\sin(\gamma).\cos(\gamma) + \frac{c.(\cos^2(\gamma)-\sin^2(\gamma))}{2} & \frac{d.\cos(\gamma)+e.\sin(\gamma)}{2} \\ (a-b).\sin(\gamma).\cos(\gamma) + \frac{c.(\cos^2(\gamma)-\sin^2(\gamma))}{2} & -a.\sin^2(\gamma) + b.\cos^2(\gamma) - c.\sin(\gamma).\cos(\gamma) & \frac{d.\sin(\gamma)+e.\cos(\gamma)}{2} \\ \frac{d.\cos(\gamma)-e.\sin(\gamma)}{2} & \frac{d.\sin(\gamma)+e.\cos(\gamma)}{2} & f \end{bmatrix}$$

Ainsi,  $Lff$  est défini dans le repère  $F'$  par substitution de ses coefficients tel que :

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a.\cos^2(\gamma) + b.\sin^2(\gamma) - c.\sin(\gamma).\cos(\gamma) \\ a.\sin^2(\gamma) + b.\cos^2(\gamma) + c.\sin(\gamma).\cos(\gamma) \\ 2(a-b).\sin(\gamma).\cos(\gamma) + c.(\cos^2(\gamma) - \sin^2(\gamma)) \\ d.\cos(\gamma) - e.\sin(\gamma) \\ d.\sin(\gamma) + e.\cos(\gamma) \\ f \end{bmatrix}$$

Soient  $Lff'_1$  et  $Lff'_2$  les fonctions décrites dans les repères  $F'_1$  et  $F'_2$  respectifs. Ils sont alors représentés par leurs coefficients respectifs suivants.

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ b'_1 \\ c'_1 \\ d'_1 \\ e'_1 \\ f'_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a'_2 \\ b'_2 \\ c'_2 \\ d'_2 \\ e'_2 \\ f'_2 \end{bmatrix}$$

### Rotation autour du vecteur directeur de la droite d'intersection

Soit  $\alpha_{F' \rightarrow \bar{F}}$  l'angle orienté entre les normales de  $\mathbf{n}_1$  vers  $\bar{\mathbf{n}}$ .

$$\begin{aligned} \alpha_{F' \rightarrow \bar{F}} &= \text{sign}(\langle n_{F'}, j_{\bar{F}} \rangle). \arccos \langle n_{F'}, n_{\bar{F}} \rangle \\ &= \text{sign}(\langle n_{F_1}, j_{\bar{F}} \rangle). \arccos \langle n_F, n_{\bar{F}} \rangle \end{aligned}$$

Nous avons vu que la rotation s'écrit dans les paramètres sphériques ainsi :

$$Lff(\cos(\phi), \cos(\theta - \alpha)\sin(\phi))$$

Ainsi, nous devons intégrer ces informations lors de l'évaluation de l'intégrale de la formule (4.6). Elles sont prises en compte plus précisément dans la variable  $\phi_t(h)$ .

En effet, on a (voir chapitre 1) :  $\phi_t(h) = \phi_t(u, v)$ .

Ainsi, il suffira de poser

$$\phi_t^\alpha(h) = \phi_t^\alpha(u, v) = \phi_t^\alpha(\cos(\phi), \cos(\theta - \alpha)\sin(\phi)) \quad (\text{A.9})$$

afin de prendre en compte la rotation.

## Contenu

- A.1 Comparaison de deux fonctions de champ de lumière**
  - A.1.1 Recalage des repères
- A.2 Domaine d'intégration après recalage**
- A.3 Comparaison de champs de lumière lors d'une contraction**
- A.4 Mise en œuvre**
  - A.4.1 Données
  - A.4.2 Erreur à la contraction de champs de lumière

## Chapitre

# B

## Images extraites des simplifications

Ce chapitre final contient des images résultants des tests que nous avons effectués sur nos deux maillages.



FIGURE B.1 – Statuette africaine avec champs de lumière : peu de motif mais de grands reflets spéculaires – 184 281 faces

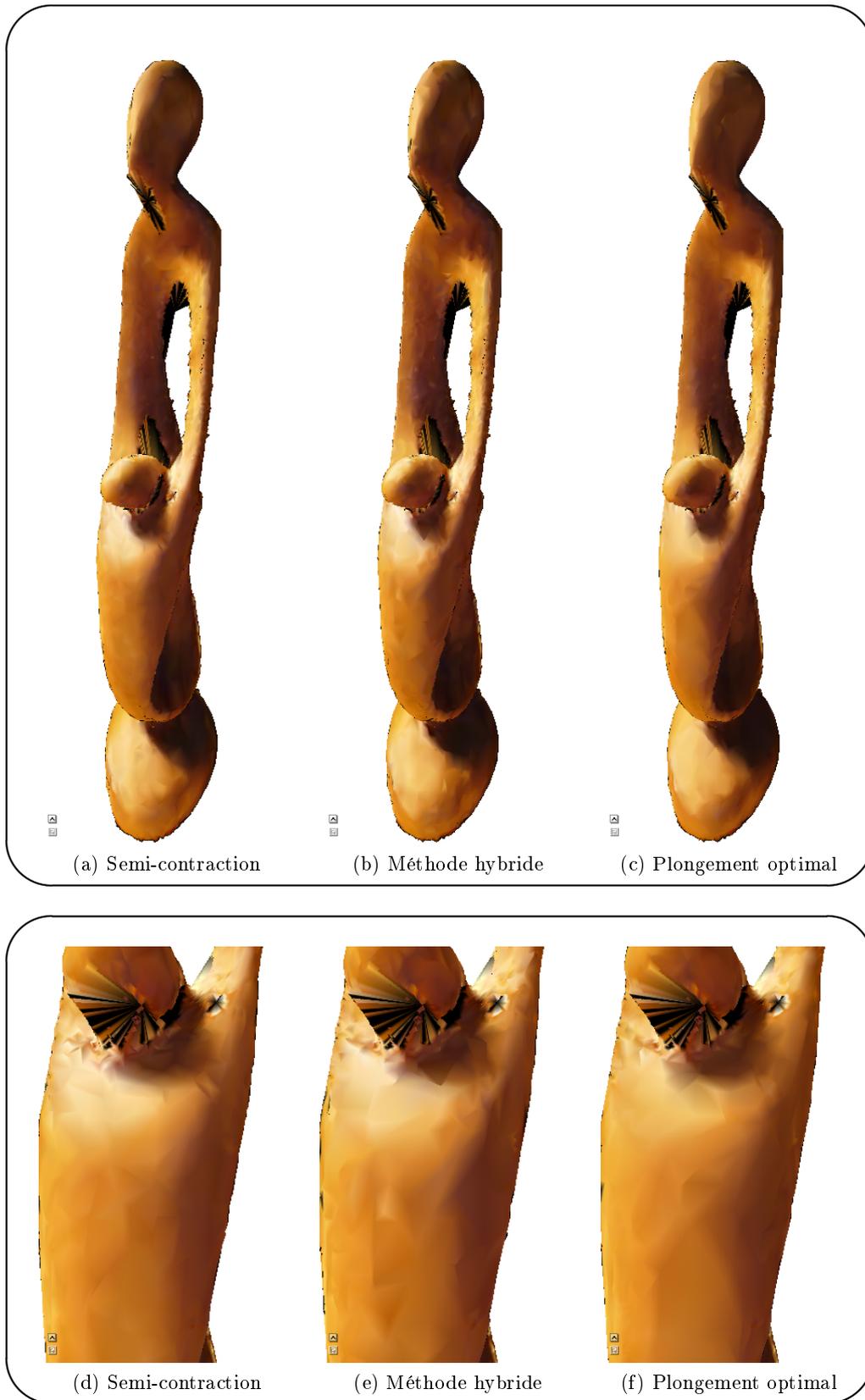


FIGURE B.2 – Comparaison des simplifications de la statuette africaine avec champs de lumière à 36 855 faces.

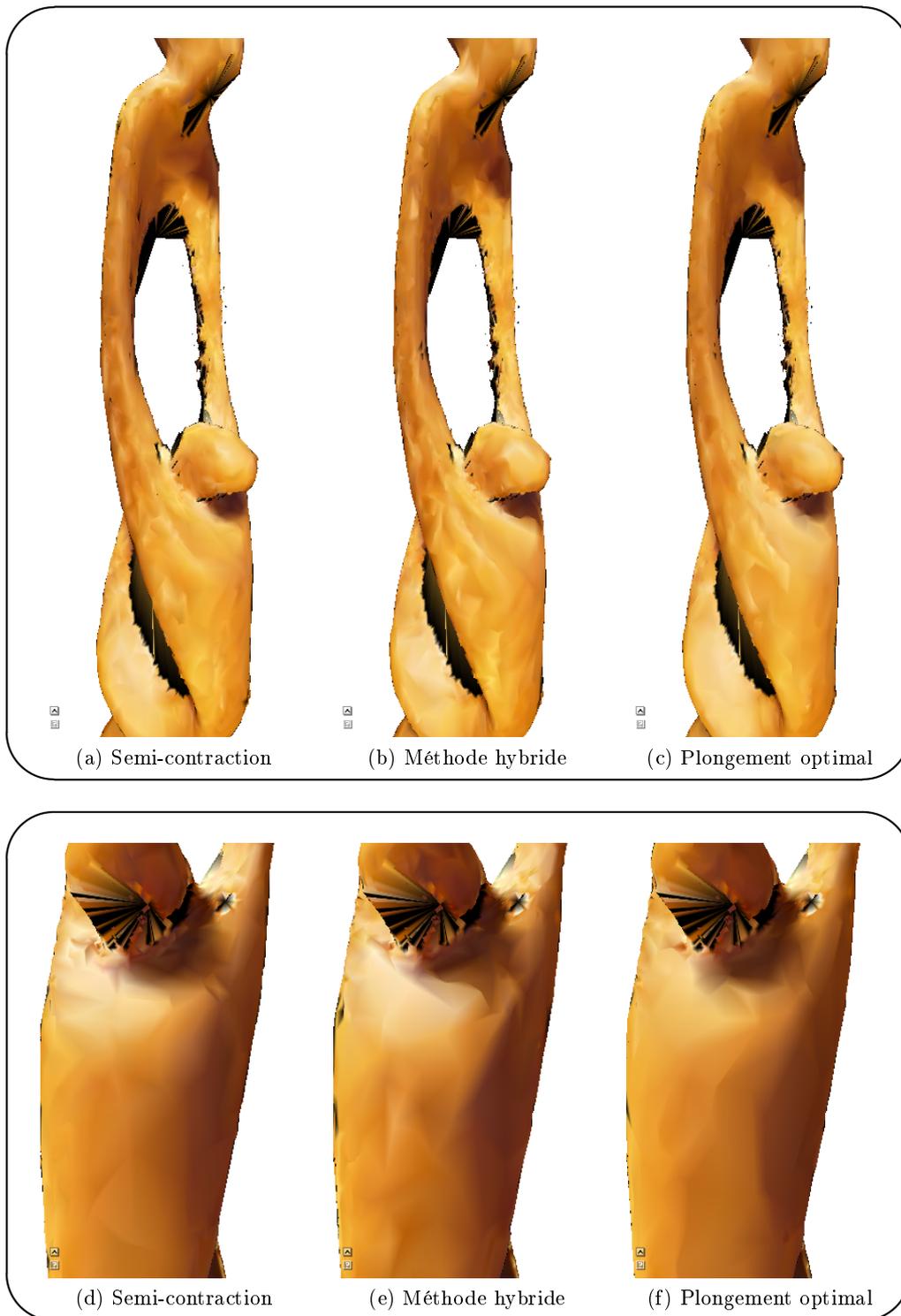


FIGURE B.3 – Comparaison des simplifications de la statuette africaine avec champs de lumière à 27 641 faces.

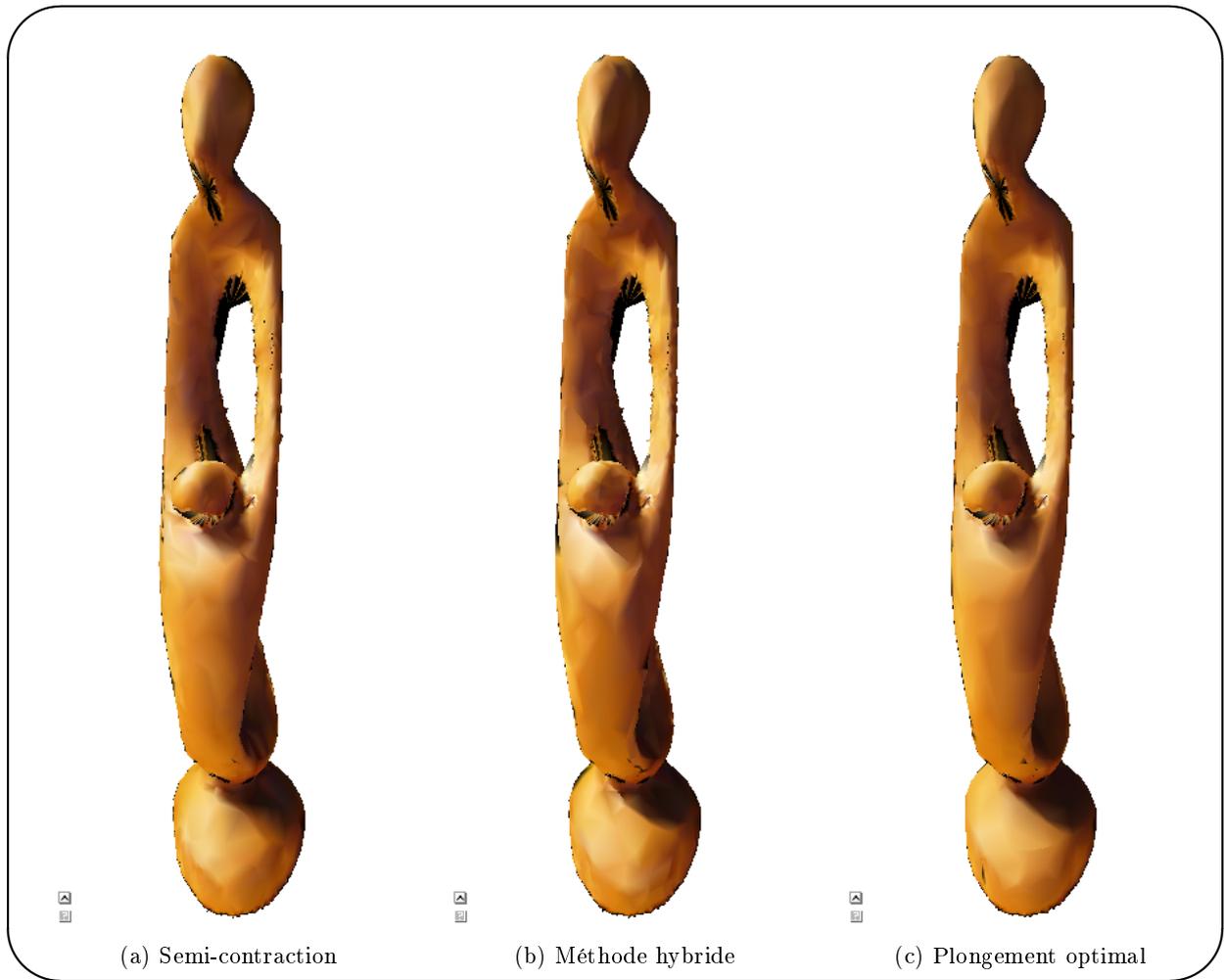


FIGURE B.4 – Comparaison des simplifications de la statuette africaine avec champs de lumière à 18 519 faces.



FIGURE B.5 – Vase grec avec champs de lumière : peu de reflets, quelques motifs – 362 512 faces



FIGURE B.6 – Comparaison des simplifications du vase grec avec champs de lumière à 72 502 faces.



FIGURE B.7 – Comparaison des simplifications du vase grec avec champs de lumière à 54 376 faces.



(a) Semi-contraction



(b) Plongement optimal



(c) Semi-contraction



(d) Plongement optimal

FIGURE B.8 – Comparaison des simplifications du vase grec avec champs de lumière à 36 430 faces.